PAIDEIA: PHILOSOPHICAL E-JOURNAL OF CHARLES UNIVERSITY

ISSN 1214-8725

Issue/Volume/Year: 1/VI/2009 (Article)

Co se můžeme naučit pozorováním důkazu Pythagorovy věty

Autor: Martin Semerád

Abstract

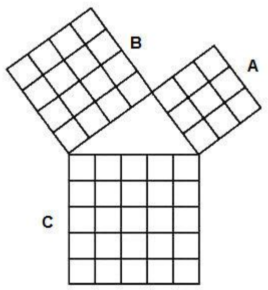
What Can Be Learned from Contemplation of Proof of Pythagorean Theorem. – The first goal of philosophy is to postulate a meaningful question in the situations, where others deem there can be no doubt. The simplest thing for nowadays mathematicians – Pythagorean Theorem – would be transform to the keystone of the gate of a new way of thinking. This paper is a small part of the very old question of Finality, Infinity, Monads, Points and Nil, which always states beyond the creation of disunion. It rehabilitates the old Euclid's intuition, which says: "The whole is always greater than the part" and also postulates the plausible antithesis to the existing math theories.

Keywords: math, Pythagorean Theorem, infinity, monad, point, nil

Klíčová slova: matematika, Pythagorova věta, nekonečno, monáda, bod, nic

Pythagorova věta zní: „V pravoúhlém trojúhelníku je součet obsahů čtverců nad odvěsnami roven obsahu čtverce nad přeponou tohoto trojúhelníka."

To, co chceme (u)vidět, je (sic!) běžnému zraku neviditelné, ale lze přeci spatřit (dojít k uvědomění si) skrze ono viditelné a v tomto smyslu nám také při našem dalším zkoumání dobře poslouží následující pomocný obrázek.



Jde nám o vyšetření situace týkající se nejznámějšího pravoúhlého trojúhelníka (nazývaného též trojúhelník egyptský) se stranami v poměru délek 3, 4, 5; přičemž naše pozornost se zaměří na obsahy čtverců nad těmito stranami (tyto čtverce jsou v našem obrázku označeny po řadě velkými latinskými písmeny A, B, C). Na první pohled se nám zdá vše zřejmé a jasné: jednotlivé (velké) čtverce (A, B, C) jsou rozděleny na čtverce menší – o straně velikosti 1 (dle poměru velikosti stran našeho trojúhelníka), tedy čtverec A nad stranou délky 3 sám obsahuje (třikrát tři čili) devět malých čtverců, čtverec B šestnáct a čtverec C pětadvacet malých čtverců; součet obsahů čtverců A a B odpovídá obsahu čtverce C – v souladu s Pythagorovou větou.

Takováto interpretace je dnes již považována za zcela běžnou a vlastně snadnou záležitost, je však třeba vzít do úvahy (uvědomit si), že již zde je na (vidoucího) čtenáře kladen velmi netriviální požadavek, a sice mít schopnost pronikat svým (vnitřním) zrakem „skrz" černobílý náčrtek (do podstaty smyslu toho, co je jím zobrazováno) – až do samých výšin (hlubin) matematického světa, do světa geometrického, ve kterém teprve může dojít ke shodě se zněním Pythagorovy věty.

Je tu však jistá věc, pro kterou chceme o celé záležitosti (přes její **zdánlivou** obvyklost) znovu hovořit a pokusit se o nové a hlubší pozorování. Popatřme pozorně na předchozí obrázek se čtverci A, B, C a všímejme si především rozkladu těchto čtverců pomocí sítě čar. Co značí ony čáry v tradičním výkladu dnešní matematiky? Jsou jimi úsečky, čili rovné linie **tvořené** z bodů; tento výklad je také možné označit za post-eukleidovský, neboť ještě v samotných Eukleidových *Základech* (cca 300 př. n. l.) nenajdeme důvod, který by opravňoval vykládat geometrické úsečky jako útvary **složené** (výhradně) z bodů, to je záležitost až mnohem pozdějšího historického vývoje.

Všimněme si, že námi pozorovaná síť má tu vlastnost, že ji lze rozložit na kolekci úseček jednotkové délky (spojené vždy po třech, čtyřech či pěti za sebou), přičemž v rámci čtverců A, B, C jsou těmito úsečkami vymezeny (ohraničeny) vnitřní prostory jednotkových čtverců. Obsah čtverců A, B, C je tedy tvořen jednak součtem **vnitřních prostor** jednotkových čtverců a dále zbylými hraničními úseky, samotnými jednotkovými úsečkami.

Můžeme se sami snadno přesvědčit, že příspěvkem vnitřních prostor k porušení Pythagorovy věty nedochází; v rámci součtu obsahů čtverců A a B jich je stejně, jako ve čtverci C a navzájem si tedy odpovídají. Jak je tomu však s onou hraniční sítí úseček? Zatímco čtverec **A obsahuje 24 jednotkových úseků** (čtyři řady úseček délky tři a stejný počet obdobných úseček ve sloupcích), čtverec **B jich obsahuje 40** (dvakrát – pět krát čtyři), čtverec **C však jen 60** (v řadách i ve sloupcích šest krát pět). Součet obsahů čtverců nad přeponami egyptského trojúhelníka (vyjma již započítaných pětadvaceti vnitřních ploch) je tedy tvořen 64 jednotkovými úsečkami, kdežto čtverec nad přeponou jich obsahuje jen 60: je tedy patrné, že součet obsahů čtverců nad odvěsnami je (příspěvkem hraničních úseků) větší, než obsah čtverce nad přeponou, a **Pythagorova věta** v tomto případě **neplatí**.

Dnešní matematici onen zřejmý spor (s platností Pythagorovy věty) řeší následujícím způsobem, když říkají: „Onen rozdíl (v řádu úseček) je vzhledem k velikosti obsahu čtverce příliš nepatrný, než aby mohl hrát jakoukoli roli pro celkovou velikost obsahů porovnávaných čtverců a je jej tedy možno pokládat za zanedbatelný.“

Základní směřování takovéto úvahy je možno pokládat za správné, avšak matematik (na rozdíl od obchodníka) se nemůže spokojit s rozdílem „pouze“ nepatrným či zanedbatelným: buď Pythagorova věta platí přesně, čili nic; aby tedy bylo vše v pořádku, musí být onen rozdíl **absolutně nulový**, musí být **skutečně žádný**! To, že tomu tak v dnešní matematice není, není vinou geometrie samé, ale až jejího novodobého výkladu – především pak vinou neuváženého přijetí pojmu nedělitelný **stavební** bod.

Jak velká je velikost jednoho geometrického bodu v novodobé matematice? Jistěže ne žádná (což je však právě, jak ukážeme, ona podstatná chyba)! Připomeňme, že v dnešní matematice jsou všechny geometrické útvary vytvářeny (pouze!) z bodů a bod má tedy (již nutně) i svou vlastní velikost – a sice touto velikostí je právě velikost jednoho bodu (onu svou velikost si bod také sám sobě doměřuje)! To zní jako samozřejmost, ale nic samozřejmého na tom není: ptejme se, co se stane, vyjmeme-li (odebereme-li) z daného geometrického útvaru (z dané množiny geometrických bodů) jeden či více těchto bodů? Výsledný geometrický útvar bude (dnešní matematikou) pokládán za **jiný**, než onen výchozí (!!!), např. dojde-li k odebrání třech rohových bodů v trojúhelníku, bude se výsledný geometrický útvar lišit od výchozího trojúhelníku ve třech (údajně) chybějících bodech!

ISSN 1214-8725

O tom, že dnešní matematika používá geometrický bod skutečně ve smyslu něčeho „jsoucího“ a „vytvářejícího“, se můžeme přesvědčit i na mnoha dalších příkladech: tak např. dnešní matematik běžně používá pojmy jako otevřená a uzavřená koule – či otevřená a uzavřená úsečka; přičemž uzavřený [0,1] a otevřený (0,1) jednotkový interval (z oboru tzv. reálných čísel) se v tomto pojetí liší v dvojprvkové množině krajních čísel {0,1} – tedy ve dvou bodech tzv. reálné osy. Z těchto a mnoha dalších příkladů lze dovodit, že dnešní geometrický bod má skutečnou vlastní velikost (neboť existují různé množiny lišící se pouze (a právě) v (tom kterém) jediném bodě). Dnešní geometrie je pak naukou o rozličném uspořádání těchto jednostejných nedělitelných bodů, přičemž každý bod lze do výsledného geometrického útvaru buď přidat, nebo od něj odebrat – je tedy každý bod sám o sobě tvořící, vytvářející změnu a není jej proto obecně možné považovat za zanedbatelný, neboť naopak platí, že **rozdíl byť v jediném bodě je vždy patrný!**

Kolik bodů obsahuje (dle dnešní matematiky) jedna úsečka a kolik bodů obsahuje její čtverec (čtverec se stranou o velikosti této úsečky)? Kdo se ještě nikdy s odpovědí[1] na tuto otázku nesetkal, bude jistě překvapen: v obou souborech (v úsečce i jejím čtverci) je (údajně) bodů stejně mnoho (a sice stejné nekonečné množství), dokonce je toto množství stejné nejen pro libovolně dlouhou úsečku a každý čtverec, ale i pro celý geometrický prostor. Tedy vzhledem k bodové (počítací) míře je onen (prý!) nepatrný rozdíl obsahů čtverců (v rámci hraničních úseček, jak jsme zjistili pozorováním důkazu Pythagorovy věty) v posledku stejně velký, jako je počet bodů celého čtverce, dokonce je roven počtu bodů celého prostoru vůbec! Vidíme tedy, že onen rozdíl je (v bodové počítací míře) v posledku tak velký, že zcela znehodnocuje veškerý výsledek počítání.[2]

Jestli se někomu tímto způsobem vykládaná matematika jeví jako nemyslitelná a málo rozumná, potom může být ujištěn, že není se svým názorem osamocen; dnešní matematika je totiž zcela ve sporu již s původním Eukleidovým výkladem, kde na prvním místě v *Základech* stojí v rámci obecných pravidel psáno: „Přidají-li se k nerovným rovné, celky jsou nerovny“ (čtvrtý Eukleidův axiom z první knihy) a dále „Celek je větší než díl“ (osmý axiom téže knihy). Tedy u Eukleida nemůže být v žádném případě úsečka považována (dle žádného kritéria) za rovnou svým obsahem celému čtverci (obsahující tuto úsečku) či dokonce celému zbylému prostoru a rovněž bychom marně hledali možnost doměřovat velikost geometrického objektu v jednotlivých bodech, neboť onen bod, který nemá části, nese jak u Eukleida, tak i v učení jemu předcházející školy pythagorejské, zcela jiné určující vlastnosti než dnešní bod geometrický!

Vraťme se znovu k našemu příkladu se čtverci egyptského trojúhelníka, konkrétně dále k oné síti (temných) dělicích čar. Jak jsme viděli, Pythagorova věta bude (bezezbytku) platit pouze tehdy, jestliže onen rozdíl (způsobený rozdílným počtem jednotkových úseček v obsazích čtverců) bude roven nule – tedy v případě, že ony úsečky budou skutečně **ničím**! To je v posledku i klíč k řešení celé záhady rozporu dnešní a původní Eukleidovy geometrie –

[1] Platí však pouze v soudobé „moderní“ matematice od konce 19. století (od teorie množin George Cantora), u Bernarda Bolzana roku 1848 bylo ještě vše úplně jinak, ve shodě s Eukleidovým postulátem o celku a části!

[2] Úsměvně působí pak naše další zjištění, že jsme byli přespříliš „přísní“ k dnešním matematikům, když jsme říkali, že v jejich pojetí Pythagorova věta neplatí: ona zde totiž, i když svým vlastním a osobitým způsobem, v poněkud pozměněné podobě platí stále, a sice v následujícím znění: „Libovolný geometrický útvar (či součet libovolného množství těchto útvarů) obsahující alespoň jednu úsečku má stejný (bodový) obsah, jako libovolný jiný geometrický obrazec obsahující alespoň jednu úsečku.“ Zvláštním případem a důsledkem tohoto způsobu počítání je potom i platnost klasického znění Pythagorovy věty.

ISSN 1214-8725

ony body, nemající dílu, nejsou skutečně nic víc, než **nic**. Co je míněno oním nic a jak si je lze představit? Jednu ze základních podob onoho hraničního nic nalezneme v jeho čisté podobě především v pythagorejské nauce o počtu, a sice v rozdílu sudých a lichých čísel. Vezměme si první taková čísla za příklad – čili dvojku a trojku.

Dvojka je snoubením dvou celků nebo též rozdělením původní jednoty na dva protiklady, na dvě poloviny. Co leží uprostřed mezi těmito polovinami? Zde neleží nic nebo také přesněji (pro onen dvojí zápor v češtině) – ony dvě poloviny od sebe odděluje nic, prázdno.[3] Kdyby uprostřed dvou členů bylo něco jiného než nic, tedy obecně něco určitého, nešlo by již o číslo sudé, ale liché: u lichých čísel je totiž uprostřed vždy jeden z vytvářejících členů. Avšak ono prázdno, které se nám v sudých číslech odhaluje, neexistuje samo o sobě, ale objevuje se vždy pouze na hranici (!) něčeho jsoucího; naopak platí, že jednotlivé je vyděleno z ostatního (z celku) vždy onou (pomyslnou) hranicí.

Ve chvíli, kdy jsme získali intuicí přístup k onomu již delší čas zapomenutému pojmu, kterým je **nic** (co skutečná hranice věcí), můžeme nyní začít nejen chápat výrok antického filosofa Leukippa: „Rozklad se děje působením prázdna“; nebo též Demokritovo rčení: „Dva atomy, které se dotýkají, jsouť od sebe rozhodně odděleny prázdnem,“ ale můžeme především začít rozmotávat celý historický příběh matematiky plný zřejmých omylů.

Vraťme se k našemu důkazu Pythagorovy věty a znovu si povšimněme černých linií, které oddělují jednotlivé jednotkové díly v egyptském čtverci: ony linie nejsou složeny z bodů – které by měly možnost cokoliv vytvářet – ale jsou (pomyslnou) hranicí ploch, které se navzájem dotýkají, jsou tedy pouze prázdnem (které je však rozdílné od prázdna, které vzniká na místě vyjmutí něčeho určitého). Tyto body jsou skutečně bezrozměrné a nemají proto ani dílu (původní Eukleidovo vymezení pojmu bod v první definici úvodní knihy *Základů* – Bod je to, co nemá díl), avšak pouze jejich prostřednictvím není možné nic určitého sestavit – nemohou nic vytvářet, neb jsou skutečně ničím – a co je nejdůležitější, nemohou být ani samostatně odebrány (neboť jsou pevně (s)vázány s oním jsoucím, které vymezují), nemůže tedy po nich zůstat prázdný prostor. Nemá tedy smysl se ptát, zda-li se dva geometrické útvary mohou lišit v jednom bodě – nemohou (!); obdobně nemá smysl hovořit o uzavřených a otevřených intervalech, neexistuje např. kruh bez své vnější kružnice!

Na základě nového pochopení pojmu bod vyšetřeme nyní některé další geometrické situace a vztahy, které současná matematika neumí uspokojivým způsobem vyřešit. Prvním z nich je úkol rozdělení úsečky na dvě stejné, sobě podobné části. Geometrická konstrukce nalezení středního bodu dělení úsečky je obecně známá, otázkou však je, ke které z obou částí bude onen půlící bod patřit? Dnešní matematik nemá žádnou uspokojivou odpověď na takto jednoduchou a přirozenou otázku – neboť onen půlící bod musí svou (byť pouze bodovou) velikostí (připomeňme, že úsečka s koncovým bodem je pro dnešní matematiku jiné geometrické jsoucno, než úsečka bez koncového bodu) připadnout pouze jedné z disjunktních částí dělení; má-li se tedy úsečka rozdělit na dvě disjunktní poloviny, musí onen půlící bod náležet pouze do jedné z nově vzniklých množin, tedy vzniká neřešitelný problém.

Tak např. rozpůlit jednotkový interval <0,1> na dvě stejné disjunktní poloviny není v současné matematice možné (stejně tak neumí dnešní matematik rozpůlit disjunktním

[3] Prázdno odděluje věci, ježto je jakýmsi dělidlem a hranicí sousedních věcí. Je především u čísel, neboť prázdno ohraničuje jejich podstatu. 58 B30, Aristotelés, *Fyzika* 213b22–27.

ISSN 1214-8725

způsobem ani čtverec, kruh, krychli apod.), důvodem je onen dělící bod {½}. V původní eukleidovské či pythagorejské matematice je vše nadmíru snadné a názorné – onen půlící bod je společným koncovým bodem obou polovičních úseček, je onou hranicí, která se nedá od zbylé úsečky odpojit, povstává až s oním aktem půlení, bez něj a bez oněch polovin nemá žádnou samotnou existenci a také nemá žádnou velikost, neboť je ničím (a bod sám o sobě vlastně vůbec neexistuje, bod povstává právě a pouze jako hranice věcí).

Vrátíme-li se zpět k našemu rozkladu čtverců egyptského trojúhelníka, je zřejmé, že ony oddělující hranice malých čtverců **nepřispívají žádným způsobem** k velikosti obsahu zmíněných čtverců A, B, C (neb ona hranice je ničím) a Pythagorova věta v tomto případě opět bezrozporně platí.

Zbývá nám ještě prošetřit jednu záležitost, která též pro své nepochopení napáchala v matematice nejednu potíž. Kromě bodů, které jsou skutečně nedělitelné (a bez dílu, jak nás učí Eukleidés), existují i body, které skutečnou velikost mají: tyto budeme dále, pro rozlišení od oněch prvních, nazývat atomy či lépe monády; přičemž monády mohou být k sobě navzájem v různých poměrech (velikostí) a v rozličných vztazích, tedy nejen poměrů konečných, ale i nekonečných. Důležitý rozdíl mezi monádou a nedělitelným bodem je ten, že každá monáda má svůj obsah (a v principu též vždy i části, neboť také neexistuje žádné nejmenší jsoucno mající velikost, které by nešlo ještě znovu rozdělit). Zmatek v matematice nastal však tehdy, když se oba dva tyto různé pojmy – geometrický eukleidovský bod a monáda (pojem původně zavedený Giordanem Brunem, později využitý G. Leibnizem) – spojily v pojem jediný, který však je nejen zavádějící, ale i zcela nepochopitelný.

Eukleidovské body nelze dále rozdělit, neb (ne)jsou ničím;[4] naproti tomu monády obecně dělit lze, ale za ztráty toho, co činí onu monádu jedinečným jsoucnem (a z tohoto důvodu můžeme nazývat monádu též atomem – čili nedělitelným jsoucnem. Zde má však ona nedělitelnost jinou povahu, než u geometrického bodu, viz dále)! Monáda totiž odpovídá v pythagorejské matematice jedničce, tedy svébytnému celku a jak možná mnozí vědí, každá monáda (každý atom) má možnost zrcadlit veškerenstvo (tedy každá monáda obsahuje tolik částí, co zbylý svět, leč samozřejmě nikoliv ve stejné, ale ve zmenšené podobě). Důležité přitom je, že monáda stojí obecně mimo kategorie konečnost – nekonečnost (jak ukážeme ještě později, opak tohoto tvrzení je další ze zmatků, které přijala současná matematika za vlastní).

Člověk je tedy také atomem (monádou), od řeckého ATOMOS – nedělitelný; stejně jako obecně všechny ostatní atomy, neboť rozdělením člověka nezískáme dva lidi, ale případně jiné nižší atomy (monády) – avšak jiné kvality (!!!) – např. na tělesné úrovni jednotlivé orgány, buňky, organely, molekuly, jednotlivé fyzikální prvky atd... Po každém dělení (monády) můžeme postupovat vždy dál a každou monádu vždy opět rozdělit; avšak ani po (tom kterém) nekonečném počtu dělení nelze dospět od jsoucího k nejsoucímu, tedy od monády (jedničky) ke geometrickému bodu bez části (k nule), neboť žádné dělení nemůže přivést jsoucí k nejsoucímu (a přijetí aktuálního nekonečna na tom nic nezmění). Geometrický bod bez části, ono nic, které odděluje jednotlivá jsoucna, se přitom objevuje při obecně každém (od)dělení a ohraničuje všechna samostatná jsoucna – nezáleží přitom na tom, jak

[4] Pro češtinu je dvojí zápor mnohdy významově totéž, co zápor jeden.

velký daný celek je, ať už jde o jednotlivého člověka, planetu Zemi, zářící Slunce, molekulu vody nebo konec úsečky.

Historickým omylem bylo ztotožnění pythagorejské nuly a jedničky čili smíchání vlastností geometrického bodu s vlastnostmi monád – a to do onoho prapodivného slepence, který v posledku vedl i k vytvoření tzv. teorie množin, která si dnes klade za cíl vykládat veškerou matematiku. První, co nás však u teorie množin (a moderní matematiky vůbec) musí trknout do očí, je skutečnost, že všechny množiny (v klasické teorii množin) jsou vesměs buď prázdné – nebo vzniklé z oné prázdné množiny formálním uzávorkováním (množina, která obsahuje pouze prázdnou množinu, se totiž pokládá za rozdílnou od množiny pouze prázdné, neb má jeden prvek – onu prázdnou množinu), případně kombinací a opakováním tohoto postupu, tedy dalším uzávorkováním oněch takto vzniklých množin.

V teorii množin je tak vše vytvořeno z ničeho (z prázdné množiny) a žádné skutečné objekty, které by např. mohly mít povahu rozprostraněnosti, v ní nenajdeme.[5] Důležité při tom je si uvědomit, že kromě oddělujícího prázdna, které je skutečně všude-stejné, existuje i to, co dává světu jeho rozmanitost, jeho pravou podobu, která je odvislá od jednotlivostí – a sice svět monád – svět jsoucího, přičemž každá monáda se od jiné monády obecně odlišuje, neexistují žádné dvě, které by byly zcela stejné (jako neexistují dva stejné atomy zlata, či jakákoliv dvě jiná jsoucna). Nic ze jsoucího však není součástí dnešní matematiky.

Při vzniku infinitezimálního počtu stál jako myšlenkové východisko právě pojem nekonečně malých monád, nekonečně malých veličin. Mnozí matematici však nebyli s to (či ochotni) pochopit existenci takových jsoucen, a tak nejenže onu původní podobu tohoto počtu, kterou vypracoval Leibniz s Newtonem, zavrhli, ale navíc následně ztotožnili nekonečně malé monády a geometrické body! Jenže monády a body mají nejen rozdílné základní určení, ale také zcela odlišné geometrické vlastnosti! Např. dva geometrické body nemohou nikdy stát vedle sebe (každé dva geometrické body jsou od sebe vždy odděleny něčím jsoucím (které lze dále dělit) – a tedy mezi každé dva geometrické body lze vložit libovolné množství dalších geometrických bodů) – na rozdíl od (byť nekonečně malých) monád, které se zřejmě mohou dotýkat, tedy stát vedle sebe.

Odtud pak onen rozpor (dnešní matematiky) s obecnou lidskou intuicí – kdy dnešní matematici tvrdošíjně trvají na tom, že dvě (zcela zřejmě) různá reálná čísla 0,999999999... a 1,0 splývají (a jsou tedy číslem pouze jediným), ačkoliv každý „ne-matematik“ ví (vidí), že se jedná o dvě různé veličiny, lišící se od sebe o nekonečně malou část, přičemž tyto dvě rozdílné veličiny stojí v desítkové soustavě vedle sebe, jsou od sebe odlišné a dobře odlišitelné (a to i ve své velikosti, která lze snadno vyčíslit). Rozdíl těchto dvou veličin je (sic!) nekonečně malý – ale zcela jistě ne nulový, jde (vzhledem k původní jednotce o nekonečně malou číselnou monádu), a můžeme jej (jako každou jinou monádu) případně i dále dělit ještě na menší úseky (menší číselné monády) – prakticky např. tím způsobem, že zvětšíme výchozí číselnou soustavu, tedy užijeme-li obecně jemnější dělení.

[5] Někdy tato hra vede až tak daleko, že někteří matematici neumějí spočítat pomocí matematiky ani to, kolik papírů leží na stole, protože jsoucno „papír“ není v matematice dobře definované, a tedy do matematiky vůbec nepatří, nedá se o něm tedy ani formálně správným způsobem rozhodovat. Tato ultraformalistická pozice bývá většinou zastávána ve chvíli, kdy se má začít hovořit o filosofickém podkladu a smyslu celé matematické vědy a jejího vztahu ke světu.

ISSN 1214-8725

Problémem zakladatelů dnešní matematiky se stalo to, že na rozdíl od Leibnize, Bernarda Bolzana či Augustina Smetany neuchopili správným způsobem pojem aktuální nekonečno. Aktuální nekonečno je množina (soubor), která je nekonečná,[6] avšak je zároveň ukončená, tedy neměnná. Naproti tomu původní podoba nekonečna – dnes nazývána potenciální – je podobou nekonečna v jeho vlastní podobě, tedy v jevu neukončenosti (nestálosti, pohyblivosti, změny).[7] Aktuální nekonečno se dnes vykládá jako jakýsi vyšší stupeň nekonečna „pouze“ potencionálního, ačkoli v rámci hierarchie pojmů by tomu mělo být právě naopak, aktuálnímu nekonečnu totiž odpovídá konečné nekonečno (ukončené, završené nekonečno), které se vždy druží s nekonečným konečnem a činí tak plynulý přechod mezi ryze konečnými a ryze nekonečnými soubory, tedy mezi potenciálním nekonečnem (které se také může nazývat nekonečné nekonečno) a oním základním typem velikostí, které doměřují konečná čísla (např. všechna malá pythagorejská čísla, ke kterým se dá skutečně také bezpečně dopočítat). Ona plynulost přechodu přitom spočívá v tom, že neexistuje ani žádné nejmenší konečné nekonečno ani žádné největší nekonečné konečno. Hierarchie těchto pojmů má tedy následující podobu:

Konečné konečno – nekonečné konečno, konečné nekonečno – nekonečné nekonečno

v rámci matematických pojmů:

Konečná čísla – aktuálně nekonečné soubory – potenciálně nekonečné soubory

To, co se v dnešní matematice nazývá aktuálně nekonečnou množinou přirozených čísel – co jest údajně nejmenší nekonečná množina obsahující pouze konečná přirozená čísla, je ve skutečnosti sporný pojem – neboť každý víceprvkový soubor lze zmenšit alespoň o jeden prvek (viz základní vlastnost celku a části postulované Eukleidem), tedy též pro každou nekonečnou množinu existuje menší nekonečná množina; průnik všech nekonečných množin obsahující všechna konečná čísla (konečná konečna) tedy neexistuje, neboť to nemůže být ani prázdný soubor (obsahuje nutně jedničku, dvojku atd.), ani soubor konečný, avšak ani to nemůže být (ten který) soubor nekonečný, neboť oním průnikem by musela být ustanovena jistá **minimální nekonečná množina**, avšak pro každou nekonečnou množinu existuje nekonečná množina menší (vzniklá odebráním jednoho či více prvků), čili nejmenší nekonečná množina **je sporný pojem** a tedy množina této vlastnosti neexistuje.

Kdykoliv tedy hovoříme v matematice ve smyslu vyšetření jistého „přechodu až do nekonečna“, musíme mít na zřeteli, že vždy jde pouze o přechod do „toho kterého“ aktuálního nekonečna (spojení přechod až do potenciálního nekonečna nedává smysl, protože onen přechod není ukončen a nelze jej tedy ani určit ani o něm hovořit jako už o dokončeném); nemáme obecně k dispozici žádné „to které“ minimální nekonečno, které by bylo možno vzít za základ onoho spojení „až do nekonečna“, neexistuje tedy ani žádná minimální nekonečná množina přirozených čísel N. (Uvědomme si, jaké množství velmi pochybných matematických tvrzení závisí podstatným způsobem právě na existenci takovéto nejmenší nekonečných množiny čísel N.)

[6] Nekonečná množina je množina, ve které existuje taková posloupnost členů, která s každým svým prvkem obsahuje i následníka tohoto prvku, přičemž jednotlivé prvky oné posloupnosti jsou od sebe různé.
[7] Příkladem potenciálního nekonečna by v dnešní teorii množin byl např. soubor ordinálních čísel, který nelze pojmout v jednu množinu.

Prvotním příkladem pro nás budiž součet základní geometrické řady. Každá nekonečná řada (veličina), která vznikne součtem (racionálních) čísel, kdy každý následující člen řady je tvořen pouhou polovinou členu předcházejícího, tedy každá řada typu:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots \qquad (*)$$

nemůže nikdy dosáhnout dvojnásobku velikosti prvního členu, v tomto případě velikosti 1, ale vždy bude součet této řady o něco menší. O jak mnoho se bude lišit (součet nekonečné řady (*) od dvojnásobku prvního členu, tedy od jedničky), bude (obecně) záležet na délce sčítané řady, tedy na velikosti *toho kterého* užitého nekonečna, při aktuálně nekonečné délce řady |N| bude rozdíl od jedničky přesně v poměru 1 ku $2^{|N|}$. Důležitá pro nás je skutečnost, že každé aktuální nekonečno (každé konečné nekonečno) se druží s nekonečným konečnem (tedy s Bolzanovským pojmem nekonečné množství),[8] což nám umožňuje v posledku onen součet u nekonečné řady v mnoha případech určit i početně – zcela přesně.

Uvědomme si, že pokud nahlédneme možnosti jiným způsobem sčítat tzv. geometrické řady, ke kterým patří i ona řada se stále na polovic se zmenšujícími sčítanými členy (*), potom je třeba přehodnotit i většinu výsledků stávající matematické analýzy i práci s tzv. reálnými čísly. Tak např. již není dále možné zobrazovat vzájemně jednoznačně menší úsečku na větší, aniž by došlo ke změně velikosti monád, které ji tvoří. Je-li jednotková úsečka tvořena pomocí |N| monád, potom dvojnásobná úsečka bude mít |2N| monád stejné velikosti, nebo též |N| monád dvojnásobné velikosti.

Dnešní matematika však nemá přístup k rozlišování jednotlivých nekonečně malých monád (jsoucen) vzájemně od sebe, neboť pracuje pouze s různě uspořádanými soubory bodů (tedy pouze s nejsoucím); dnešní matematika tedy tvrdí, že ona dvojnásobná úsečka je na svém prvém úseku shodná s úsečkou výchozí (nevidí žádnou změnu oněch tvořících monád, protože tyto nevidí vůbec) a v posledku tedy tvrdí i to, že jednotková a dvojnásobná úsečka obsahuje stejné množství geometrických bodů, přičemž toto své tvrzení dokládá na základě jistého vzájemně jednoznačného vztahu oněch nedělitelných geometrických bodů: my však již víme, že ačkoliv tyto body bez dílu, tyto hraniční geometrické body na sebe vzájemně jednoznačně zobrazit lze, nemají tyto (eukleidovské geometrické body) na celkovou velikost úsečky vůbec žádný vliv – protože pro velikost není vůbec rozhodující množství oddělujících bezrozměrných bodů (které jsou ničím), nýbrž velikost (skutečně) vytvářejících monád.

Je dobré si uvědomit, že dnešní matematika je tak přes svou neobyčejnou rafinovanost a nesmírně propracovanou komplikovanost podstatným způsobem závislá na výše uvedených, již po více než sto let stále dokola opakovaných chybách – které souvisejí konkrétním způsobem jednak s přijetím myšlenky geometrického bodu co stavební jednotky v geometrii, jednak s odmítnutím nekonečně malých veličin a nepochopením pojmu nekonečného množství vymezeného v rámci *Paradoxů nekonečna* u Bernarda Bolzana, v posledku pak se zavedením striktního formalismu při práci s abstraktním uspořádáním do sebe vnořených prázdných množin (Frege, Cantor); obecně pak s vyřazením všech konkrétních (rozprostraněných) jsoucen z matematiky.

[8] Pojem nekonečné množství nalezneme u českého filosofa a matematika Bernarda Bolzana v jeho posmrtně vydaném spise *Paradoxy nekonečna,* jehož význam současní matematici dílem nechápou vůbec a pokládají většinu jeho myšlenek vzhledem ke spornosti s jimi užívané pozdější Cantorovy teorie množin od začátku za chybu – viz jediné existující kritické české vydání z roku 1963.

Pro pythagorejce bylo vše, co jest, také číslem – a matematika byla nedílnou součástí theurgie, oslavy stvořeného a stvořitele – tedy i např. člověk, strom či jednotlivé hvězdy byly v této filosofii obsaženy a byly součástí matematiky (filosofie); dnešní formalistická matematika zaměřená pouze na kalkul (na přerovnávání a vyvozování z uspořádaných formulí) nemůže tento starý způsob myšlení ani napodobit, a vlastně nemá ani žádnou možnost jakkoli o reálném světě bytí vůbec hovořit! V tomto smyslu je současná matematika nepřátelská člověku a jeho přirozenému světu a neměla by být vnucována těm, kteří se jí (pro její nesmyslnost) odmítají dále zaobírat.

Vyšli jsme od pozorování důkazu Pythagorovy věty, abychom si uvědomili, co dnešní matematice chybí – nejprve jsme si povšimli, že chybí kategorie pro hranici, která je ničím, abychom se následně přesvědčili o tom, že dnešní matematika nemá vůbec přístup ke jsoucnu, které jest, tedy k monádám – k jednotlivinám. Nová podoba matematiky, která se tímto způsobem vynořila před horizont našeho zření a kterou jsme zažili v rámci předchozích úvah, je matematikou minulosti i budoucnosti – minulosti proto, že je již obsažena jednak ve staré nauce pythagorejské a také v díle Leibnize, Bolzana či Augustina Smetany, budoucnosti pak proto, že její další rozvinutí a renesance je záležitostí nikoliv doby dnešní či právě minulé, ale té, která přijde až po generaci dnešních formalistů (cenících si především mechanické odvoditelnosti a vyvoditelnosti), té budoucí generaci matematiků, kteří znovu obnoví zasnoubení matematiky a filosofie, tedy těch, kteří nebudou napříště opovrhovat původní lidskou intuicí, která naštěstí stále žije i v rámci dnešního přirozeného poznání lidí (a zvláště dětí, kde je mimořádně patrná) – v hlubinách vědomí pod povrchem (pod nánosem) dnešního oficiálního školského systému.

SEZNAM LITERATURY

Aristotelés, *Fyzika.* Přeložil a poznámkami opatřil Antonín Kříž. Praha: Petr Rezek, 1996.

Bolzano, Bernard, *Paradoxy nekonečna.* Přeložil a komentářem opatřil Otakar Zich. Praha: ČSAV, 1963.

Eukleidés, *Základy. Knihy I–IV;* komentované Petrem Vopěnkou. Nymburk: Otevřeně prospěšná společnost, 2007.

(*Mgr. Martin Semerád,* filosof matematiky, doktorand UK Pedagogické fakulty v Praze, obor filosofie, lektor Akademie sociálního umění Tabor v Praze.)