Scientia in educatione, 10(1), 2019
p. 68–89
ISSN 1804-7106

Žákovské koncepty trojúhelníku a obdélníku na začátku druhého stupně vzdělávání

Jarmila Robová, Vlasta Moravcová,
Zdeněk Halas, Jana Hromadová

Abstrakt

Článek se věnuje porozumění pojmům trojúhelník a obdélník u žáků na začátku 2. stupně vzdělávání. Prostřednictvím testu byly zadány úlohy, v nichž žáci měli rozhodnout, zda vyznačené body (vnější, vnitřní, na stranách, vrcholy) náleží trojúhelníku, respektive obdélníku. Dále bylo zkoumáno, jak žáci určí počet společných bodů trojúhelníku a přímky v různých vzájemných polohách. Testování proběhlo u 505 žáků 6. ročníků základních škol a prim osmiletých gymnázií. Jednotlivé odpovědi byly kódovány a podrobeny statistické analýze. Možné příčiny žákovských odpovědí byly následně prověřeny v rámci polostrukturovaných rozhovorů s dalšími 20 žáky. Testování předcházela analýza několika řad učebnic pro první stupeň, z níž vyplynulo, že koncept trojúhelníku i obdélníku prochází vývojem od hmotných modelů (vystřihovaných) přes vhodné abstraktní modely (vybarvené) až po redukci útvaru na pouhou hranici, což může podpořit miskoncepce pojmů trojúhelník a obdélník. Zjistili jsme, že adekvátní koncept trojúhelníku, respektive obdélníku, se vyskytuje přibližně u poloviny sledovaných žáků, přičemž mezi dívkami a chlapci nejsou podstatné rozdíly. Nejčastějším problémem bylo, že žáci redukovali trojúhelník pouze na jeho hranici. V závěru upozorňujeme na možné důsledky této miskoncepce (obsah – obvod, porozumění tělesům) a předkládáme některá doporučení, která by mohla vést k nápravě.

Klíčová slova: trojúhelník, obdélník, miskoncepce, výuka geometrie, ISCED 2.

Pupils' Concepts of the Triangle and the Rectangle at the Beginning of Lower Secondary School

Abstract

The article deals with pupils' understanding of concepts of the triangle and the rectangle at the beginning of lower secondary school. The pupils were administered a test consisting of tasks asking them to decide whether the marked points (external, internal, on the sides, vertices) belonged to a triangle or rectangle, respectively. The assignment also sought to establish how pupils determined the number of common points which a triangle shared with differently positioned lines. A total of 505 pupils attending the 6$^{\text{th}}$ grade of lower secondary schools took part in our testing. The individual responses were coded and subjected to statistical analysis. Possible causes of pupils' responses were subsequently investigated in semi-structured interviews with another 20 pupils. The testing was preceded by an analysis of several textbook series designed for primary schools, which indicate that the pupils' concept of the triangle and the rectangle tends to evolve from spatial models (cut out of paper) through appropriate geometric shapes (crayon coloured) which are eventually reduced to their bare boundaries, an evolution process which may generate misconceptions of triangles and rectangles on the part of the pupils. We found that approximately only half of the pupils had an adequate concept of the triangle or rectangle; there were no significant differences between girls and boys. The most common problem was that the pupils reduced the triangle only to its boundary. In conclusion, we draw attention to the possible consequences of this misconception (area-perimeter, understanding polyhedra) and make some recommendations that could lead to correction.

Key words: triangle, rectangle, misconception, teaching geometry, ISCED 2.

Geometrie je důležitou součástí vzdělávání v matematice od předškolního vzdělávání až po střední školu. Její význam z hlediska výuky elementární matematiky spočívá především v tom, že zkoumání geometrických objektů a vztahů, zejména na úrovni 1. stupně základní školy, umožňuje na základě snadno přístupných úvah, které vycházejí z pozorování žáků, přiblížit základní principy matematického uvažování včetně zdůvodňování vztahů mezi objekty. Oproti tomu další oblasti školské matematiky, jako je aritmetika či algebra, mají více abstraktní charakter (Hadamard, 2008). Geometrie byla proto vždy považována za disciplínu, která umožňuje výrazně kultivovat myšlení žáků a rozvíjet jejich tvořivost (Jirotková, 2010). To je také dáno tím, že geometrické pojmy a představy lze většinou snadno graficky znázornit a tyto grafické reprezentace mohou být efektivnějším nositelem informace než verbální či symbolický zápis (Kuřina, 1989).

Geometrie je tedy významnou součástí výuky elementární matematiky a její pochopení, obdobně jako v jiných disciplínách, je podmíněno porozuměním základním geometrickým pojmům. Často však u žáků dochází k formálnímu osvojení geometrických pojmů a jejich představy tak bývají deformované. Znalosti žáků se například omezují pouze na typické tvary a polohu zdůrazňující vertikální a horizontální směry (Hejný & Kuřina, 2009).

Za základní pojmy eukleidovské geometrie jsou dnes zpravidla považovány *bod*, *přímka* a *rovina*. Tyto pojmy se pokusil vymezit již Eukleidés ve svých *Základech* (Servít, 1907); sám však tato vymezení nikde nepoužil, neboť se nejednalo o korektní definice, ale spíše o přiblížení, co si pod těmito pojmy představit. V 19. století sílily snahy o přesnou axiomatizaci rovinné a prostorové geometrie; nejznámější soubor axiómů, primitivních pojmů a relací publikoval německý matematik D. Hilbert (1899). Pojmy *bod*, *přímka* a *rovina* zvolil za primitivní pojmy, nedefinoval je tedy explicitně, ale určil je pouze tím, že musejí vyhovovat stanoveným axiómům.

Ve školské geometrii se bod a přímka zavádějí na prvním stupni, rovina na druhém[1] stupni základní školy, přičemž cílem je vytvořit u žáků adekvátní představy. Na začátku našeho výzkumu v roce 2017 jsme se v neformálně koncipovaném

[1]Žáci prvního stupně pracují v rovině intuitivně, ale samotný pojem se zpravidla nezavádí.

dotazníku zeptali dvou skupin žáků[2] co je bod, přímka a rovina.[3] Jejich odpovědi se zásadně nelišily. Žáci nejčastěji u otázky, co je bod, uváděli: „je to tečka, je to určené místo“; „je to nejmenší místo v prostoru“, „je to minimální objekt v prostoru definovaný souřadnicemi“ apod. Jen ojediněle se vyskytly odpovědi postihující bezrozměrnost bodu: „je to bezrozměrný objekt v prostoru“, „je to označené místo v prostoru, nemá žádný rozměr“, „je to jedno místo – nekonečně malé“.

Zatímco formulaci *nekonečně malý* ve spojení s pojmem bod použil jeden žák, nekonečnost přímky se objevila v odpovědích většiny žáků u druhé otázky, co je to přímka: „je to čára bez konce“, „je to jednorozměrná nekončící čára v prostoru“, „je to čára do nekonečna“, „je to nekonečná rovná linie“ atd. Vícekrát byly zastoupeny nejednoznačné odpovědi, že přímka je určena dvěma (různými) body: „je to spojení dvou bodů“. Vyloženě nesprávné představy typu: „přímka je nějaká čára, která má konec a začátek“, byly pouze ojedinělé. Objevilo se i několik kuriózních odpovědí: „je to například čtverec v 1D“; „je to nekonečná množina bodů, co stojí frontu“. K obdobným zjištěním o představách žáků vztahujících se k pojmům bod a přímka dospěli Prokopová a Rys (2003) na základě standardizovaných rozhovorů se žáky ve věku 9 až 18 let. Rovněž Jirotková a Litter (2003) ve svém výzkumu popsali obdobné koncepty přímky u budoucích učitelů 1. stupně.

Popsat rovinu bylo pro obě skupiny žáků z našeho dotazníkového šetření, dle očekávání, nejtěžší. K nejvýstižnějším odpovědím dle našeho názoru zde patřilo: „je to 2D nekončící plocha v prostoru“, „je to vodorovná plocha“ apod. Jeden primán popsal souřadnicovou rovinu: „je to množství bodů v prostoru mezi osami x a y“. Žáci si často při vysvětlení pomáhali reálnými modely, například „je to papír, na který rýsuju, kdyby byl nekonečně veliký“. Jiný žák primy se pokusil popsat svou představu, že v rovině je více bodů než na přímce, takto: „rovina je nekonečná množina bodů (toto nekonečno je však větší než nekonečno bodů přímky), které vytváří celou souvislou plochu“.

Ukázalo se, že až na výjimky jistou představu o základních pojmech mladší i starší žáci mají, činí jim však potíže ji popsat slovy, vystihnout její podstatu. Podle naší dotazníkové sondy se jeví jako pravděpodobné, že studium střední školy chápání pojmů u žáků neovlivnilo a na vysoké školy odcházejí s představou, kterou získali na nižších stupních vzdělávání. V naší výzkumné studii jsme se proto zaměřili na porozumění některým geometrickým pojmům u žáků již na začátku druhého stupně vzdělávání.

Teoretický rámec

Problematikou žákovského porozumění pojmům a jevům se zabývá řada vědních oborů včetně psychologie, pedagogiky i oborových didaktik. V souvislosti se školní výukou se často používá označení *žákovo pojetí učiva*. Jedná se o soubor žákovských poznatků, představ, přesvědčení, emocí i očekávání souvisejících s učivem; tento soubor se v čase mění (Čáp & Mareš, 2001). Průcha, Walterová a Mareš uvádějí, že „žákovo pojetí učiva se nevytváří jen na základě té podoby učiva, která je prezentována ve výuce (učitelem, učebnicí aj.), ale často na základě naivních teorií dítěte, jež nemusí být v souladu s výukovou podobou učiva.“ (2009: s. 389).

[2] Jednalo se o dvaadvacet žáků prim (odpovídá 8. ročníku ZŠ) a dvacet maturantů jednoho pražského šestiletého gymnázia.

[3] Dotazník obsahoval tři otázky: „Co je to bod – jak byste vysvětlili pojem bod?“, „Co je to přímka – jak byste vysvětlili pojem přímka?“, „Co je to rovina – jak byste vysvětlili pojem rovina?“

Představy o pojmech a jevech, které si dítě osvojilo dříve, než je škola začala zpřesňovat, jsou označovány jako *prekoncepce, resp. prekoncepty*; tyto prekoncepce žák nerad mění, neboť je vnímá jako pravdivé (Škoda & Doulík, 2011). Prekoncepce „jsou tedy nutnou podmínkou učení, ale zároveň mohou představovat překážku nebo komplikaci“ (Kalhous et al., 2009: s. 54). Ve školní výuce žák získává nové poznatky, a může tak docházet ke střetu mezi žákovými prekoncepty a tím, co se učí. Výsledkem tohoto procesu jsou *žákovské koncepce* učiva, které někdy mohou být nesprávné. Pro označení chybné představy pojmu či jevu se v odborné literatuře používá také pojem *miskoncepce* (Čáp & Mareš, 2001; Škoda & Doulík, 2011), toto označení se váže jak k prekonceptům, tak k žákovským konceptům učiva, případně je chápáno jako jedna z podob pojetí učiva žáky.

Nesprávné představy pojmů v matematice často souvisejí s formálními žákovými znalostmi, které jsou uchovávány pouze pamětí a žák k nim nemá vytvořené adekvátní modely (Hejný & Kuřina, 2001). V geometrii je tento formalismus dobře pozorovatelný v případě identifikace útvarů, kdy žáci obvykle správně rozpoznají jen typický model daného útvaru, který bývá označován jako *prototyp* (Hershkowitz, 1989; Monaghan, 2000), z pohledu Hejného a Kuřiny (2001) jde o případ izolovaného modelu pojmu. Například předškolní děti nemají problém označit pojmem trojúhelník jeho prototyp, kterým je rovnostranný trojúhelník s jednou vodorovnou stranou, zatímco u tupoúhlého trojúhelníku budou váhat (Clements et al., 1999; Tirosh et al., 2011). Obdobně Budínová (2017, 2018) zjistila, že mnoho žáků 4. ročníku ze zkoumaného vzorku chápe pojmy trojúhelník a čtverec prototypicky, tj. správným pojmem označí jen prototyp trojúhelníku a čtverce, a zůstávají tak dle van Hieleho teorie na úrovni vizualizace (van Hiele, 1986). V případě trojúhelníku se jednalo o rovnostranný či rovnoramenný trojúhelník s jednou stranou, resp. základnou, vodorovnou. V případě prototypu čtverce se opět jednalo o představu spojenou s jeho vodorovnou stranou. Změna polohy či tvaru těchto útvarů zřejmě ovlivnila to, že žáci nedokázali útvar správně pojmenovat.

Zkoumáním žákovských konceptů týkajících se základních geometrických pojmů se u nás v posledních letech zabývalo několik dalších výzkumných šetření, tato šetření se zaměřila převážně na žáky prvního stupně základní školy a současně i na budoucí učitele. Chodorová a Juklová (2017) zadaly stejný dotazník žákům 4. a 5. ročníků základních škol, dále studentům učitelství pro první stupeň a studentům učitelství matematiky pro druhý stupeň základních škol. Dvě položky dotazníku zkoumaly porozumění planimetrickým pojmům (úsečka, přímka, polopřímka), další tři stereometrickým vztahům (vzájemné polohy přímek, manipulace s krychlí), poslední šestá položka obsahovala dotaz na oblibu geometrie. Autorky šetření zjistily, že nesprávné představy se vyskytují nejen u žáků, ale i u budoucích učitelů, problémy s pochopením základních geometrických pojmů měla nezanedbatelná část budoucích učitelů prvního stupně a někteří budoucí učitelé matematiky druhého stupně. K obdobnému závěru dospěla rovněž Kupčáková (2017), která zadala test s pěti úlohami zaměřenými na základní geometrické pojmy (přímka, úsečka, polopřímka, střed úsečky, kruh, kružnice a jejich průměr a poloměr) žákům 3. až 7. ročníku a také budoucím učitelům prvního stupně. U každé úlohy se vyskytla skupina respondentů, která měla s danou úlohou problém.

Také řada zahraničních výzkumů se zaměřila z hlediska porozumění pojmům, jako je trojúhelník či čtverec a obdélník, na správnou identifikaci těchto útvarů nezávisle na jejich poloze a velikosti, a to především u žáků předškolního či mladšího školního věku. Tyto studie ukázaly, že žáci používají vizuální prototyp při identifikaci geometrických objektů a mají tendenci dělat chyby, pokud jsou dané objekty v jiné než v prototypové formě (Cutugno & Spagnolo, 2002; Vighi, 2003; Dağlı & Halat, 2016). Žáci neadekvátním zobecněním specifické polohy útvaru dospívají ke konceptu daného pojmu (Clements & Battista, 1992).

K základním faktorům, které ovlivňují výuku geometrie ve školách, a tedy i přístup k zavádění základních geometrických pojmů, patří vedle kurikula také učebnice i konkrétní přístup učitele a jeho znalosti a dovednosti. Kupčáková (2017) upozorňuje, že nejpoužívanější současné české učebnice geometrie obvykle nejsou v souladu s očekávanými výstupy uvedenými v *Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání*, dále jen RVP ZV, často vycházejí z axiomatického pojetí planimetrie, které je pro žáky v mladším školním věku náročné. Základní abstraktní pojmy, jako je bod či přímka, nelze ve výuce mladším žákům jednoduše definovat, což může vést u žáků k formalismu (Rendl, Vondrová et al., 2013).

Vzhledem k výše uvedenému jsme se rozhodli zkoumat žákovské představy o geometrických pojmech, které by měl mít žák osvojené po absolvování prvního stupně základního vzdělávání, a to v souladu s požadavky RVP ZV[4] (MŠMT, 2017); konkrétně se jednalo o pojmy úsečka, přímka, polopřímka, trojúhelník, obdélník, kružnice a osa souměrnosti rovinného útvaru. V tomto článku se podrobněji zaměříme jen na pojem trojúhelníku, resp. obdélníku. Z uvedených výzkumných šetření vyplývá, že zkoumání žákovských představ spojených s pojmy trojúhelník, čtverec či obdélník se zaměřuje na vliv tvaru, polohy či velikosti těchto útvarů, avšak zkoumání žákovských konceptů těchto útvarů jako částí roviny, které kromě hranice obsahují i vnitřní body, není běžné. Schopnost rozhodnout, zda vyznačený bod náleží, či nenáleží danému objektu, však patří mezi základní dovednosti související s pochopením geometrických pojmů a jejich popisem na druhé úrovni[5] van Hieleho teorie (van Hiele, 1986; Ma, H. et al., 2015). Cílem našeho příspěvku je proto přispět k poznání v této oblasti z uvedeného hlediska, a to v rámci řešení následující výzkumné otázky:

Jaké jsou koncepty trojúhelníku, resp. obdélníku u žáků na začátku druhého stupně vzdělávání: dvourozměrný útvar, nebo jen jeho hranice?

V souvislosti s uvedenou otázkou jsme také sledovali tyto koncepty zvlášť u dívek a chlapců.

Metodika výzkumu

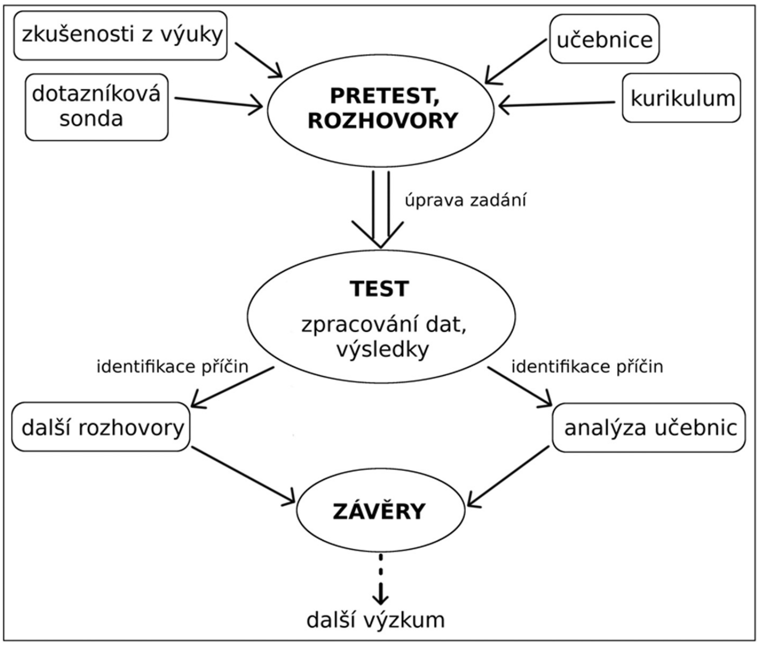
Průběh našeho výzkumu zahrnoval několik fází, které jsou pro lepší orientaci zachyceny v následujícím schématu (obr. 1). Metodika klíčových kroků výzkumu je popsána dále v této kapitole.

Pro zkoumání žákovských představ o pojmu trojúhelník byla z diagnostických metod zvolena metoda anonymního[6] písemného testu, doplněná polostrukturovanými rozhovory se skupinami žáků.

[4]RVP ZV je otevřený dokument a od roku 2005, kdy byl vytvořen, prošel řadou změn. Testovaní žáci se vzdělávali dle verze účinné od 1. 9. 2007 (dostupné z http://www.nuv.cz/file/190_1_1/), která se v rámci okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* liší od aktuální (zde citované) verze z roku 2017 pouze tím, že jednotlivé očekávané výstupy nemají přidělené kódy a nejsou zde zvlášť formulovány minimální očekávané výstupy.

[5]Na této úrovni jsou žáci schopni formulovat a odlišit podstatné vlastnosti (např. u čtverce shodnost a kolmost sousedních stran) geometrických objektů od nepodstatných (velikost, barva, umístění).

[6]Respondenti v testu pouze vyznačili jednu z nabízených možností: chlapec, dívka.



Obr. 1: Průběh výzkumu

Při přípravě zadání testu bylo třeba respektovat současné kurikulární dokumenty. Již v *Rámcovém vzdělávacím programu pro předškolní vzdělávání* (dále jen RVP PV)[7] je zmíněno, že „učitel má dítěti nabízet činnosti zaměřené na poznávání jednoduchých obrazně znakových systémů (písmena, číslice, ...), hry a praktické úkony procvičující orientaci v prostoru i v rovině a činnosti zaměřené na seznamování se s elementárními číselnými a matematickými pojmy a jejich symbolikou (číselná řada, číslice, základní geometrické tvary, množství apod.) a jejich smysluplnou praktickou aplikaci.“ (MŠMT, 2018: s. 19–20). Konkrétnější výstupy týkající se geometrie RVP PV neuvádí.[8]

Stěžejním dokumentem pro naše výzkumné šetření byl RVP ZV (MŠMT, 2017), v němž je vzdělávací obsah jednotlivých oborů tvořen očekávanými výstupy a učivem. V rámci prvního stupně je vzdělávací obsah členěn na 1. období (první až třetí ročník) a 2. období (čtvrtý a pátý ročník). Zatímco očekávané výstupy formulované na konci 5. ročníku stanovují závaznou úroveň, očekávané výstupy na konci 3. ročníku jsou pouze orientační (MŠMT, 2017: s. 14). Učivo formulované v RVP ZV je pouze doporučené a stává se závazným až na úrovni školního vzdělávacího programu (MŠMT, 2017: s. 34).

Příprava testu, na níž se podílel celý výzkumný tým, proběhla v následujících fázích: sestavení pretestu, zadání pretestu a úprava znění úloh na základě vyhodnocení pretestu. Jednotlivé úlohy byly porovnávány s úlohami vyskytujícími se v učebnicích, s očekávanými výstupy dle RVP ZV (MŠMT, 2017) i s indikátory stanovenými ve *Standardech*, které jsou přílohou RVP ZV. Formulace zadání byly postupně upřesňovány, opakovaně bylo diskutováno řazení úloh i grafická podoba testu. Vytvořený pretest obsahoval celkem osm úloh, z nichž některé zahrnovaly dílčí podúlohy. S naší výzkumnou otázkou souvisejí úlohy 4, 6 a 7, které se tý-

[7] Zde citujeme poslední platnou verzi z roku 2018, testovaní žáci se vzdělávali dle verze z roku 2004, tyto verze se však v námi sledovaném hledisku zásadně neliší.

[8] Žáci současných 6. ročníků však ještě neměli povinnou docházku do MŠ, ta byla zavedena až od 1. 1. 2017.

kají pojmů trojúhelník, obdélník a přímka. Konstrukce a znázornění těchto útvarů nalezneme přímo mezi očekávanými výstupy RVP ZV. Konkrétně orientační výstup označený M-3-3-01 ve 3. ročníku uvádí, že „...žák rozezná, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary...“, v závazném výstupu M-5-3-01 na konci 5. ročníku je dále upřesněno, že „žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici)“ (MŠMT, 2017: s. 33). Zadané úlohy testují chápání trojúhelníku a obdélníku v tom smyslu, zda se jedná o dvoudimenzionální útvary, či nikoliv, a zjišťují uvědomění si existence vnitřních bodů těchto útvarů.

V červnu 2017 členové týmu provedli pilotáž pretestu ve dvou třídách 5. ročníku jedné pražské základní školy, pretest psalo celkem 43 žáků. Vybrané třídy nebyly nijak specifické studijním zaměřením nebo metodami výuky matematiky. Cílem pilotáže bylo především ověřit, zda je vhodně nastaven časový limit 20 minut pro řešení testu, zda jsou formulace úloh pro žáky srozumitelné a zda se dobře orientují v grafické úpravě zadání. Za účelem zjištění výše uvedených informací byly v rámci pretestu provedeny také polostrukturované rozhovory s osmi náhodně vybranými žáky, po čtyřech z každé třídy. Jeden člen výzkumného týmu mezitím zadal test ostatním žákům třídy.

Rozhovory byly vedeny vždy jedním výzkumníkem s dvojicí žáků, aby se snížil jejich ostych před cizí osobou. Dvojice za přítomnosti výzkumníka nejprve samostatně vyplnila celý test. Poté byli žáci ke každé úloze dotazováni, zda rozuměli zadání a zda si jsou svou odpovědí jisti nebo tipovali. Další otázky byly aktuálně uzpůsobeny řešením žáků, výzkumník však dbal na to, aby svými výroky a otázkami názor žáků neovlivnil. Ukázalo se, že časový limit je zbytečně dlouhý, zadání jsou srozumitelná, avšak řešení úloh 4 a 6 jsou pro žáky obtížná, neboť v řadě případů neoznačili vyznačené vnitřní body jako body náležející trojúhelníku, resp. obdélníku. V důsledku těchto zjištění jsme se rozhodli ve finální verzi testu snížit časový limit na 15 minut – trojúhelník v úloze 4 vybarvit, abychom mohli sledovat, zda tato nápověda povede k častější volbě vnitřního bodu jako bodu náležejícího trojúhelníku (obr. 2) v porovnání s úlohou 6 (obr. 3), kde jsme obdélník nechali nevybarvený. V případě úlohy 7 jsme na základě rozhovorů se žáky přidali do nabídky odpovědí týkajících se společných bodů přímky a trojúhelníku další možnost, a to existenci tří společných bodů, neboť někteří žáci vnímali na společné úsečce jako významný bod kromě krajních bodů také její střed.[9] V důsledku této úpravy bylo třeba pozměnit i poslední nabízenou odpověď „více než dva“ na „více než tři“ (obr. 4).

Výsledná verze testu byla zadána v období 18. září až 6. října 2017 žákům na začátku druhého stupně vzdělávání, konkrétně se jednalo o žáky 6. ročníků základních škol a prim osmiletých gymnázií. Všechny testy zadávali a dozorovali výzkumníci osobně, aby nemohlo docházet k ovlivnění výsledků testu. Do testování se zapojilo dvanáct škol, z toho bylo šest základních (8 tříd, jedna z nich matematická, 2 školy byly mimopražské) a šest víceletých gymnázií (12 tříd, 1 škola byla mimopražská). Celkem bylo testováno 505 žáků, z toho 280 dívek a 225 chlapců. V jedné třídě na základní škole se žáci v 1. až 4. ročníku učili Hejného metodou, avšak dle vyjádření vyučující matematiky používali v geometrii jiné výukové materiály. Na gymnázia žáci přicházejí z různých základních škol, nelze tedy přesně specifikovat, jakou metodou se žáci učili na prvním stupni. Mezi respondenty bylo celkem 6 žáků

[9] Tato úprava nám umožnila při analýze žákovských řešení rozlišit ty žáky, kteří si na společné úsečce uvědomují existenci dalších bodů kromě jejího středu a krajních bodů.

se speciálními výukovými potřebami a 1 žák s poruchou autistického spektra,[10] 2 žáci měli v době psaní testu preferovanou ruku v sádře[11].

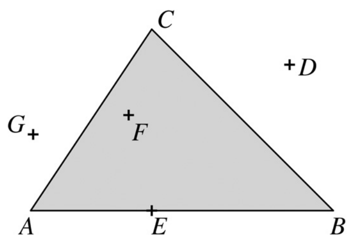
Nejdříve byly ke zpracování vybrány testy jedné třídy, které každý z autorů článku samostatně hodnotil, tj. bodoval a kódoval žákovské odpovědi dle předem stanovených kritérií použitých při zpracování pretestu. Následně byly na společných setkáních výzkumné skupiny projednány rozdíly v hodnocení úloh, stanoveno jejich výsledné hodnocení a upraven kódovací manuál, který zahrnoval pro každou úlohu kódy možných žákovských odpovědí. Testy každé třídy poté vždy opravily a kódovaly různé dvojice výzkumníků, a to nezávisle na sobě. Zjištěné rozdíly v kódování konkrétní úlohy byly prodiskutovány v rámci celé skupiny, až se dospělo ke shodě.

Analýza dat

Předmětem analýzy dat v tomto článku jsou žákovská řešení úloh 4, 6 a 7 z pretestu a z ostré verze testu, tyto úlohy byly zaměřeny na zkoumání žákovských konceptů trojúhelníku a obdélníku. Žákovské odpovědi z obou zmíněných testů byly původně zpracovány kvantitativní i kvalitativní metodou. V tomto příspěvku prezentujeme pouze výsledky kvalitativního hodnocení úloh, neboť umožnilo hlubší vhled do zkoumané problematiky. Ke kvalitativnímu zpracování dat byl na základě žákovských řešení z pretestu vypracován kódovací manuál obsahující kódy možných žákovských odpovědí. V manuálu jsou dále uvedeny dva univerzální kódy: pro správnou odpověď OK[12] a pro chybějící odpověď kód *chybí*.

Úloha 4 je uzavřená, žáci zde měli z nabízených bodů vybrat ty, které náleží danému trojúhelníku (obr. 2). V pretestu nebyl trojúhelník vybarven.

4) Které body označené písmeny patří trojúhelníku ABC? Zakroužkuj je.



Obr. 2: Zadání testové úlohy 4, ostrá verze testu

Kromě univerzálních kódů manuál obsahuje pro úlohu 4 také kódy odpovídající zakroužkovaným bodům. Například kód EF znamená, že žák zakroužkoval pouze vnitřní bod F a bod E na straně trojúhelníku.

Úloha 6 je obdobou úlohy 4; žáci zde měli označit body náležející danému obdélníku (obr. 3). Zadání této úlohy je stejné jak v pretestu, tak v ostré verzi testu.

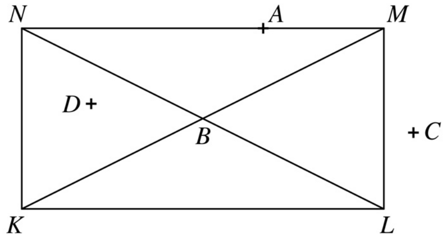
Kódy odpovědí v úloze 6 opět odpovídají zakroužkovaným bodům v žákovských řešeních, tedy například kód $KLMN$ znamená, že žák označil jako body náležející obdélníku jen jeho vrcholy.

[10] Dle vyjádření vyučujících uvedených žáků se tato omezení nijak výrazně ve výsledcích žáků v matematice neprojevovala. To potvrdily i výsledky jejich testů, které nevybočovaly z průměru testované skupiny žáků. Nebylo tedy nutné testy vyčlenit ze souboru získaných dat.

[11] Tento handicap se u žáků projevil pouze mírně sníženou kvalitou rýsování, což nemělo vliv na hodnocení testů.

[12] Kód OK tedy znamená v úloze 4 volbu bodů $ABCEF$, v úloze 6 volbu bodů $ABDKLMN$, v úloze 7a a 7b volbu možnosti „více než 3“ a v úloze 7c volbu možnosti „1“.

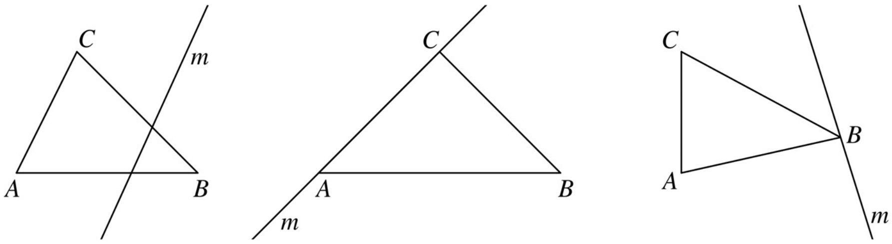
6) Které body označené písmeny patří obdélníku $KLMN$? Zakroužkuj je.



Obr. 3: Zadání testové úlohy 6, ostrá verze testu

V úloze 7 jsme se zaměřili na to, zda žáci vnímají i nevyznačené vnitřní body jako body náležející danému trojúhelníku (obr. 4). Tato úloha zahrnuje tři uzavřené podúlohy 7a, 7b a 7c (zleva na obr. 4), ve kterých žáci vybírali vždy ze čtyř možných odpovědí.[13] Kódy odpovědí v úloze 7 zahrnují kromě univerzálních kódů nabízené číselné hodnoty.

7) Kolik má přímka m společných bodů s trojúhelníkem ABC? Zakroužkuj svou odpověď.



1	1	1
2	2	2
3	3	3
VÍCE NEŽ 3	VÍCE NEŽ 3	VÍCE NEŽ 3

Obr. 4: Zadání testové úlohy 7, ostrá verze testu

Výsledky pretestu byly vzhledem k malému počtu žáků analyzovány bez využití software, ke zpracování výsledků ostrých testů byl využit program Excel a pro kontrolu online software VassarStats[14].

V rámci analýzy dat z ostrého testování byla pro každou třídu zvlášť sestavena tabulka s kvalitativním hodnocením jednotlivých žákovských odpovědí. Z takto připravených dat byly dále určeny absolutní četnosti a pro názornější představu o získaných datech také relativní četnosti výskytů kódů odpovědí u každé z testových úloh, a to jak v jednotlivých třídách, tak i v celém souboru dat. Stejná tabulka byla vytvořena také zvlášť pro dívky a chlapce; tyto skupiny však nebyly stejně početné, proto zde bylo vhodnější pracovat s relativními četnostmi. Dále byla vypracována kontingenční tabulka absolutních četností, která přehledně zobrazuje vzájemný vztah mezi odpověďmi v úlohách 4 a 6, resp. 4 a 7.

Ze získaných tabulek byla dále zjišťována závislost mezi vybranými kódy[15] žákovských odpovědí u zkoumaných úloh 4, 6 a 7. Závislosti byly hledány tak, že u každého

[13] V pretestu byly uvedeny pouze tři možné odpovědi: „1“, „2“ a „více než 2“.

[14] http://vassarstats.net/index.html

[15] Byla zkoumána závislost mezi jednotlivými kódy i mezi jejich skupinami, např. skupina kódů pro body trojúhelníku bez jeho vrcholů v úloze 4 (tj. E, F, EF) a k tomu analogická skupina kódů pro úlohu 6.

žáka bylo zjištěno, zda zvolil odpověď se sledovaným kódem, či nikoliv; odpovědi pak byla přiřazena hodnota 1, resp. 0. V úloze 4 byl takto sledován například výskyt kódu EF a jeho případná souvislost s výskytem kódu ABD v úloze 6. Po sestavení kontingenční tabulky 2×2 pouze pro tyto dva znaky, nabývající nyní hodnot 0, 1, bylo vypočítáno testovací kritérium K mající pro nezávislé znaky rozdělení χ^2 (chí-kvadrát) s jedním stupněm volnosti a následně bylo porovnáno s kritickou hodnotou na hladině významnosti 0,01.

Analýza žákovských řešení uvedených úloh byla následně doplněna polostrukturovanými rozhovory s dvaceti žáky 6. ročníku jedné pražské základní školy, abychom přesněji popsali vyskytující se žákovské koncepty trojúhelníku. Tito žáci byli rozděleni do dvou skupin po deseti. V jedné skupině nejdříve samostatně řešili mírně upravené úlohy 4 a 7a[16], ve druhé úlohy 6 a 7a[17]. Poté následoval rozhovor, který vedl vždy jeden z členů výzkumného týmu dle připraveného systému otázek, druhý z výzkumníků zaznamenával diskuzi, která probíhala nad žákovskými řešeními daných úloh.

Výsledky pretestu

Výsledky analýzy úloh 4, 6 a 7 z pretestu, který byl zadán 43 žákům (15 dívek a 28 chlapců), naznačily, že žáci vnímají trojúhelník či obdélník častěji pouze jako uzavřenou lomenou čáru. Také rozhovory s osmi žáky, kteří řešili úlohy z pretestu před členy výzkumného týmu, ukázaly, že někteří jsou přesvědčeni o tom, že vnitřní body trojúhelníku či obdélníku těmto útvarům nenáleží, o čemž svědčí například výpověď dívky D7: „Trojúhelník nemá výplň, není to těleso, patří mu jen body na úsečkách.“ Oproti tomu jiní žáci dokázali výstižně zdůvodnit správnou volbu vnitřního bodu F v úloze 4 jako třeba chlapec CH8: „Podle mě jediná kružnice je prázdná, trojúhelník je plný, i když není vybarvený, a proto F patří.“

Již v pretestu se rovněž projevila u žáků tendence nevyznačovat vrcholy daných útvarů v úlohách 4 a 6, k čemuž došlo i u pěti žáků, s nimiž byl veden rozhovor. Při pátrání po příčinách jsme se od dvojice dívek D3 a D4 dozvěděli, že body A, B, C trojúhelníku ABC nepatří, neboť „to jsou jen ty vrcholy“, dívky tedy vrcholy nezvolily záměrně. Žák CH6 zvolil nejdříve originální odpověď na úlohu 4, v níž zakroužkoval jen dva vrcholy A, B a bod E na straně AB. Na dotaz, proč nezakroužkoval i bod C, odpověděl, že na straně BC nebo AC není vyznačen žádný bod, takže bod C trojúhelníku nenáleží.

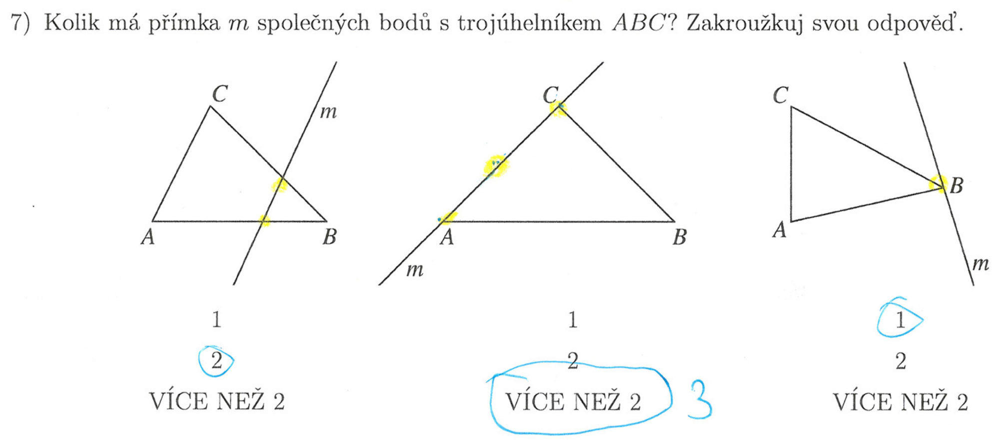
Rozhovory podpořily hypotézu, že úlohu 6 s obdélníkem budou žáci řešit podobně jako úlohu 4 s trojúhelníkem. Zajímalo nás také, zda v obdélníku zvolí častěji průsečík úhlopříček B než jeho vnitřní bod D, který nebyl uchycen na žádné úsečce náležející danému obdélníku. To se v pretestu potvrdilo – 19 žáků zakroužkovalo z vnitřních bodů pouze bod B (včetně kombinací s dalšími body na obvodu obdélníku), zatímco jen 2 žáci pouze bod D (opět i v kombinaci s dalšími body na obvodu).

V úloze 7a převážná většina žáků v pretestu volila odpověď „2“. V rozhovorech jsme žáky požádali, aby společné body nějakým způsobem vyznačili (obr. 5 a 6).

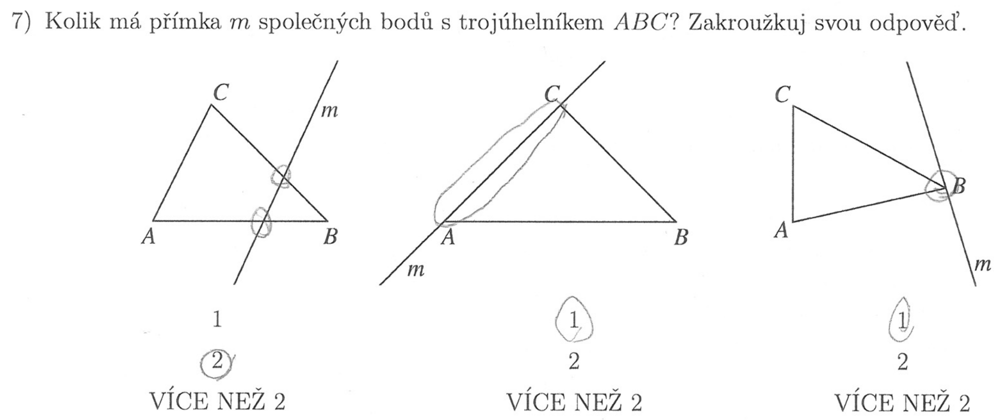
Po vyznačení dvou společných bodů na otázku: „Mezi těmi dvěma body už žádný další není?“ dívky D3 a D4 po delším váhání reagovaly: „Ne, není tam vyznačený.“ Dívka D3 však v úloze 7b zvolila odpověď „více než 2“. Na otázku, zda

[16] Trojúhelník z úlohy 4 nebyl vybarven, úloha 7a zůstala nezměněna.

[17] Oba útvary byly naopak vybarveny.



Obr. 5: Řešení úlohy 7 u dívky D3, pretest



Obr. 6: Řešení úlohy 7 u chlapce CH8, pretest

v tomto případě mezi body A a C je nějaký další bod, nám sdělila: „Jo, střed úsečky si můžu vyznačit.“ Poté učinila závěr, že společné body jsou tři (obr. 5). Dále jsme s ní mluvili o tom, že trojúhelník má s přímkou v úloze 7b společnou celou úsečku AC. Ani poté však dívka nezměnila svůj názor na původní odpověď v úloze 7a, přestože v úlohách 4 i 6 vnitřní body trojúhelníku a obdélníku zakroužkovala.

Podobný náhled na řešení úlohy 7a měla i dívka D7, která dlouho váhala, jakou odpověď zvolit. Uvažovala, zda jsou společné body 2, nebo je jich více, takto: „No, nevím, to záleží, kolik by se jich vyznačilo. Takže tam jsou 2.“

V úloze 7b se v rámci rozhovorů vyskytla ještě jedna zajímavá odpověď, že společný bod je jen jeden. Chlapec CH8 jej vyznačil tak, že zakroužkoval celou společnou úsečku (obr. 6 uprostřed) a uvedl, že přímka m se trojúhelníku dotýká stejně, jako se tečna dotýká kružnice (obrázek tečny kružnice byl součástí jiné testové úlohy). Na otázku, zda může být bod tak velký, bez váhání reagoval: „Jo.“ Je pozoruhodné, že z celého vzorku 43 žáků v pretestu tuto odpověď vybralo 18 žáků.

Výsledky ostrého testu a rozhovorů se žáky

Nyní se podíváme na výsledky úloh 4, 6 a 7 z ostré verze testu. Nejprve si uvedeme stručné shrnutí výskytů příslušných kódů v každé z uvedených úloh a následně se zaměříme na kvalitativní rozbor těchto zjištění. Jak již bylo uvedeno, tento test psalo 280 dívek a 225 chlapců, celkem tedy 505 žáků z 6. ročníků základních škol a prim osmiletých gymnázií.

Základní přehled o odpovědích v úloze 4 (obr. 2), ve které žáci označovali body náležející danému trojúhelníku, ukazuje tab. 1. Celkem se vyskytlo 18 různých kódů zachycujících zjištěné varianty odpovědí. V tab. 1 jsou však uvedeny jen ty, které se vyskytly přibližně alespoň u jednoho procenta žáků ve zkoumaném souboru. Necelá polovina žáků vyznačila v testu současně bod E na straně trojúhelníku a jeho vnitřní bod F (kód EF), přibližně čtvrtina žáků správně vyznačila z nabízených bodů všechny, které patří trojúhelníku, tj. včetně jeho vrcholů (kód OK).

Tab. 1: Absolutní a relativní četnosti žákovských odpovědí v úloze 4

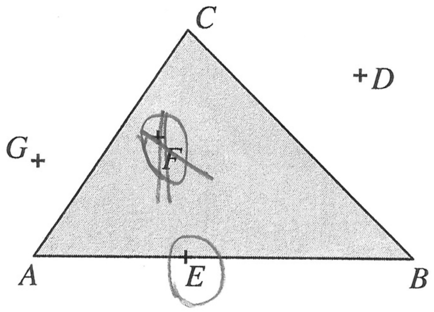
Kód odpovědi	EF	OK	$ABCE$	E	ABC	F	*chybí*
Absolutní četnost kódu	215	109	67	42	33	14	5
Relativní četnost kódu	42,57 %	21,58 %	13,27 %	8,32 %	6,53 %	2,77 %	0,99 %

Zaměřili jsme se také na to, zda jsou nějaké rozdíly v řešení této úlohy mezi dívkami a chlapci. Z tab. 2 je patrné, že výskyt kódů jednotlivých odpovědí je v obou skupinách srovnatelný.

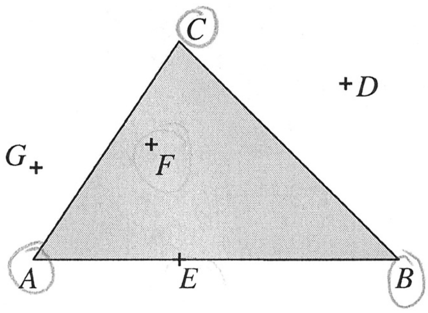
Tab. 2: Relativní četnosti odpovědí dívek a chlapců v úloze 4

Kód odpovědi	EF	OK	$ABCE$	E	ABC	F	*chybí*
Relativní četnost kódu ve skupině dívek	43,21 %	20,36 %	13,57 %	8,57 %	6,43 %	2,50 %	1,07 %
Relativní četnost kódu ve skupině chlapců	41,78 %	23,11 %	12,89 %	8,00 %	6,67 %	3,11 %	0,89 %

Žáci často váhali s odpovědí. Někdy škrtali (obr. 7), jindy gumovali (obr. 8), v několika případech bylo obtížné rozlišit, které body jsou skutečně zakroužkované.



Obr. 7: Žákovské řešení úlohy 4, ostrý test



Obr. 8: Žákovské řešení úlohy 4, ostrý test

Tab. 3 zachycuje výsledky v úloze 6 (obr. 3), kde žáci vybírali z bodů označených písmeny ty, které náleží obdélníku. Zde se vyskytlo 22 různých odpovědí, v tabulce je uvedeno 10 nejčastěji použitých kódů.

Téměř třetina žáků označila v úloze 6 současně bod A ležící na straně obdélníku, vnitřní bod D a průsečík úhlopříček B (kód odpovědi ABD). Přibližně šestina

Tab. 3: Absolutní a relativní četnosti žákovských odpovědí v úloze 6

Kód odpovědi	*ABD*	*OK*	*AD*	*ABKLMN*	*AB*
Absolutní četnost kódu	162	83	47	44	39
Relativní četnost kódu	32,08 %	16,44 %	9,31 %	8,71 %	7,72 %

Kód odpovědi	*AKLMN*	*A*	*KLMN*	*BKLMN*	*chybí*
Absolutní četnost kódu	38	21	20	13	10
Relativní četnost kódu	7,52 %	4,16 %	3,96 %	2,57 %	1,98 %

všech odpovědí byla správná (kód *OK*). Tyto dvě možnosti korespondují s dvěma nejčastějšími odpověďmi v úloze 4. V obou úlohách žáci nejčastěji buď neuvedli vrcholy mezi body patřící danému útvaru, nebo odpověděli správně. To nás vedlo ke zkoumání závislosti mezi těmito odpověďmi v obou úlohách – viz dále. Rovněž i při řešení této úlohy někteří žáci v průběhu řešení měnili své rozhodnutí obdobně jako v úloze 4. Stejně jako v úloze 4, ani zde nebyly zjištěny významné rozdíly ve výsledcích dívek a chlapců. Z přiložené tab. 4 je možné pozorovat jistý rozdíl ve prospěch chlapců v relativních četnostech u odpovědi *OK* (především na úkor odpovědi označené kódem *AD*).

Tab. 4: Relativní četnosti odpovědí dívek a chlapců v úloze 6

Kód odpovědi	*ABD*	*OK*	*AD*	*ABKLMN*	*AB*
Relativní četnost kódu ve skupině dívek	31,78 %	13,93 %	11,79 %	8,21 %	7,86 %
Relativní četnost kódu ve skupině chlapců	32,44 %	19,56 %	6,22 %	9,33 %	7,56 %

Kód odpovědi	*AKLMN*	*A*	*KLMN*	*BKLMN*	*chybí*
Relativní četnost kódu ve skupině dívek	8,93 %	3,93 %	3,93 %	2,14 %	2,14 %
Relativní četnost kódu ve skupině chlapců	5,78 %	4,44 %	4,00 %	3,11 %	1,78 %

Základní přehled o rozložení odpovědí v úloze 7 (obr. 4), kde žáci měli z nabízených možností zvolit tu, která odpovídala počtu společných bodů trojúhelníku a přímky, nabízí tab. 5 a 7. V tab. 5 jsou uvedeny všechny kódy odpovědí pro dílčí úlohy 7a a 7b, které dosahovaly relativní četnosti alespoň jedno procento.

Tab. 5: Absolutní a relativní četnosti žákovských odpovědí v úloze 7a, 7b

			7a		
Kód odpovědi	*1*	*2*	*3*	*OK*	*chybí*
Absolutní četnost kódu	16	461	10	5	11
Relativní četnost kódu	3,17 %	91,29 %	1,98 %	0,99 %	2,18 %

			7b		
Kód odpovědi	*1*	*2*	*3*	*OK*	*chybí*
Absolutní četnost kódu	100	294	6	89	13
Relativní četnost kódu	19,80 %	58,22 %	1,19 %	17,62 %	2,57 %

Z tab. 5 je patrné, že nejčastější odpovědí v úlohách 7a i 7b bylo, že trojúhelník a přímka mají společné 2 body. V úloze 7a tuto možnost zvolilo přes 90 % žáků, v úloze 7b téměř 60 % žáků. Obdobně jako v pretestu (obr. 6) se i v ostré verzi testu v úloze 7b vyskytla nezanedbatelná skupina žáků (přibližně 20 %), která zvolila možnost jednoho společného bodu trojúhelníku a přímky. Je možné, že jejich úvaha byla obdobná té, kterou nám sdělil chlapec CH8 při rozhovoru během řešení pretestu – situaci s trojúhelníkem a přímkou vnímal jako analogii tečny kružnice, proto volil jeden společný bod. Dívky a chlapci se ve svých odpovědích na otázku 7a příliš nelišili. V úloze 7b je počet správných odpovědí u obou skupin srovnatelný, avšak chlapci výrazně častěji než dívky volili odpověď „1“, zatímco dívky zase preferovaly odpověď „2“ (tab. 6).

Tab. 6: Relativní četnosti odpovědí dívek a chlapců v úlohách 7a a 7b

	7a				
Kód odpovědi	*1*	*2*	*3*	*OK*	*chybí*
Relativní četnost kódu ve skupině dívek	4,29 %	91,07 %	1,78 %	0,36 %	2,14 %
Relativní četnost kódu ve skupině chlapců	1,78 %	91,56 %	2,22 %	1,78 %	2,22 %

	7b				
Kód odpovědi	*1*	*2*	*3*	*OK*	*chybí*
Relativní četnost kódu ve skupině dívek	16,43 %	62,14 %	1,79 %	16,43 %	2,14 %
Relativní četnost kódu ve skupině chlapců	24,00 %	53,33 %	0,44 %	19,11 %	3,11 %

V tab. 7 jsou uvedeny kódy všech zaznamenaných odpovědí v úloze 7c. Úspěšnost řešení úlohy 7c, v níž má přímka s trojúhelníkem společný jediný bod, byla vysoká. Správně odpovědělo přes 96 % žáků, přibližně 2 % žáků neuvedla žádnou odpověď.

Tab. 7: Absolutní a relativní četnosti kódů v 7c

	7c			
Kód odpovědi	*OK**	*2*	*3*	*chybí*
Absolutní četnost kódu	487	4	4	10
Relativní četnost kódu	96,44 %	0,79 %	0,79 %	1,98 %

*Zkratka *OK* byla použita pro kódování správné odpovědi „1“ společný bod.

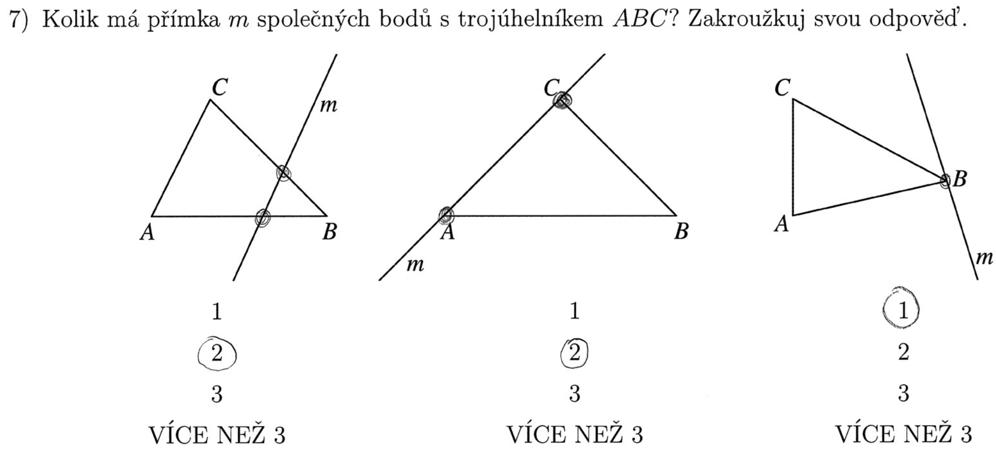
Výsledky chlapců a dívek se v této úloze zásadně neliší (tab. 8).

Tab. 8: Relativní četnosti odpovědí dívek a chlapců v úloze 7c

	7c			
Kód odpovědi	*OK*	*2*	*3*	*chybí*
Relativní četnost kódu ve skupině dívek	97,14 %	1,07 %	0,36 %	1,43 %
Relativní četnost kódu ve skupině chlapců	95,56 %	0,44 %	1,33 %	2,67 %

Někteří žáci si při řešení úlohy 7 dokreslovali do daných obrázků společné body přímky a trojúhelníku (obr. 9). Obdobně zvýrazňovali společné body i žáci v pretestu (obr. 6), kde o to byli požádáni.

Nyní se podíváme na získané výsledky detailněji. Z tab. 1 a 3 vyplývá, že v úloze 4 s vybarveným trojúhelníkem žáci častěji označovali vnitřní body oproti úloze 6 s nevybarveným obdélníkem. Rozhovory se žáky během vypracování pretestu poukázaly na skutečnost, že úlohu 6 s obdélníkem řeší někteří žáci obdobně jako úlohu 4 s trojúhelníkem. Zkoumali jsme tedy dále, zda existuje závislost mezi nejčastějšími



Obr. 9: Vyznačení společných bodů přímky a trojúhelníku v úloze 7, ostrý test

odpověďmi – kód EF v úloze 4 a kód ABD v úloze 6; v obou úlohách totiž žáci zapomínali uvést vrcholy těchto útvarů. Pro tyto účely byl použit χ^2 test nezávislosti, pomocí něhož bylo vypočítáno testovací kritérium $K = 238{,}08$ a porovnáno s kritickou hodnotou na hladině významnosti 0,01. Testovací kritérium je výrazně vyšší, než kritická hodnota[18] můžeme tedy nulovou hypotézu, že tyto dva kódy na sobě nezávisí, zamítnout. Naopak se ukázalo, že je zde významná souvislost mezi uvedením odpovědí EF a ABD.

Dále jsme se v úlohách 4 a 6 zaměřili na vztah mezi odpověďmi, v nichž žák neuvedl žádný z vrcholů útvarů. I zde hodnota testovacího kritéria vychází větší než kritická hodnota.[19] Nulovou hypotézu o nezávislosti uvedených odpovědí můžeme tedy zamítnout, neuvedení vrcholů u trojúhelníku a u obdélníku spolu souvisí. Obdobně vychází χ^2 test nezávislosti i pro odpovědi OK v úlohách 4 a 6.[20]

Zjištěná závislost však ještě nevypovídá nic o příčinách volby těchto odpovědí. Nelze usuzovat, zda jsou si žáci vědomi, jestli vrcholy útvarům náleží, či nikoliv. Pro objasnění možných příčin byly proto provedeny další rozhovory se žáky; výsledky rozhovorů jsou uvedeny dále.

Stejně jako v pretestu nás také zajímalo, zda v úloze 6 žáci z vnitřních bodů obdélníku volí častěji průsečík úhlopříček B než vnitřní bod D (a to i v kombinaci s dalšími body obdélníku), který není uchycen na žádné znázorněné úsečce. Bod B bez bodu D zvolilo 98 žáků, tj. pětina, zatímco bod D bez bodu B zakroužkovalo jen 57 žáků, tj. desetina. Oproti pretestu zde nebyl mezi těmito dvěma odpověďmi tak velký rozdíl v jejich četnostech.

Při porovnání výsledků úloh 4, 6 a 7a se ukázalo, že volba vnitřních bodů v úlohách 4 a 6 neznamenala automaticky, že žáci správně odpověděli také v úloze 7a. Při porovnání výsledků úloh 4, 6 s úlohami 7b, 7c je zřejmé, že přestože v úlohách 4 a 6 žáci často vrcholy útvarů neuváděli, v úlohách 7b a 7c je započítali.

Abychom podrobněji porozuměli tomu, proč žáci uváděli v testu některé odpovědi a jaké jsou jejich představy o trojúhelníku, resp. obdélníku, rozhodli jsme se realizovat polostrukturované rozhovory se žáky 6. ročníku jedné pražské základní školy.[21] Konkrétně jsme v rámci rozhovorů zkoumali, proč žáci při označení bodů

[18] $K = 238{,}08 > 6{,}635 = \chi_1^2(0{,}01)$.

[19] $K = 395{,}94 > 6{,}635 = \chi_1^2(0{,}01)$.

[20] $K = 307{,}53 > 6{,}635 = \chi_1^2(0{,}01)$.

[21] Tito žáci nebyli účastníky ostrého testování na podzim 2017. Rozhovory probíhaly na začátku května 2018.

trojúhelníku a obdélníku zapomínali v úlohách 4 a 6 na jejich vrcholy, proč opomíjeli vyznačené vnitřní body obou útvarů, proč v úlohách 7a a 7b volili nesprávnou odpověď „2“ společné body přímky a trojúhelníku a zda vybarvení obrazce přispělo u žáků k volbě jeho vnitřních bodů.

Dvěma skupinám po 10 žácích jsme nejdříve dali řešit dvě mírně upravené úlohy z testu; první skupina řešila úlohy 4 a 7a,[22] druhá 6 a 7a.[23] Poté, co žáci samostatně úlohy vyřešili, následovaly rozhovory, ve kterých jsme se jich tázali, proč zvolili tu kterou konkrétní odpověď.

V případě úlohy 4 v první skupině zpočátku zakroužkovali vrcholy trojúhelníku A, B, C pouze 2 žáci z 10. Někteří při cíleném dotazu velmi rychle opravili svoji volbu a vrcholy zahrnuli mezi body trojúhelníku. Objevily se však i opačné názory, například: „Body A, B, C trojúhelníku nenáleží, jsou to vrcholy“. Žáci se neshodli v tom, zda by zvýraznění bodů, např. křížkem, přispělo k jejich volbě. Několik žáků zakroužkovalo i vnější bod trojúhelníku s odkazem na to, že bod leží na „těžnici“.[24] Bod ležící na straně trojúhelníku žáci často označili, někteří však zpočátku argumentovali tím, že je blízko středu strany, proto trojúhelníku náleží. Záhy se však vesměs shodli, že všechny body ležící na stranách náleží trojúhelníku.

Vyznačený vnitřní bod F trojúhelníku nezakroužkovalo 6 žáků. Většinou se shodli, že trojúhelník „jsou tři čáry a co je na těch čárách, to trojúhelníku patří“, jeden žák dokonce uvedl příměr, že trojúhelník „není žádný talíř“. Naopak jako argument pro zakroužkování vnitřního bodu trojúhelníku zaznělo, že „je to území, uvnitř je F uvězněný, nemůže ven – proto do trojúhelníku patří“. Ukázalo se, že rozhodnutí by nezměnilo ani vybarvení trojúhelníku; žáci v této skupině zpravidla chápali vybarvení jen jako formu grafického zvýraznění útvaru.

Obdobně jako v první skupině i žáci druhé skupiny opomíjeli při řešení úlohy 6 označit vrcholy obdélníku (9 z 10) mezi body, které mu náleží. Dozvěděli jsme se, že tyto body nezaškrtli, neboť si mysleli, že když jsou uvedeny v zadání, tak je nemusí již označovat. Jeden žák to shrnul takto: „V zadání je zakroužkujte body obdélníku $KLMN$, to znamená, že ty body již nemusíme vyznačit.“ Jedna z dívek trvala na své původní odpovědi: „Já jsem uvažovala tak, že to $KLMN$ byly jen názvy těch vrcholů, jako že to nebyl bod.“ Nakonec se žáci vesměs shodli na tom, že vrcholy obdélníku patří. Bod A zadaný na straně obdélníku žáci často označili jako bod patřící tomuto útvaru (7 z 10); po krátké diskuzi se domluvili na tom, že body na stranách jsou vždy body obdélníku. Z hlediska vnitřních bodů žádný z nich neuvedl daný vnitřní bod D mezi body obdélníku. Na přímý dotaz, proč ne, odpovídal jeden z žáků: „Tak ten tam podle mě vůbec nepatří, protože není ani na žádné úsečce. On sice je jako že uvnitř toho obdélníku, ale patřil by tam tehdy, kdyby byl na nějaké úsečce jako ten bod A.“ Postupně jsme doplňujícími otázkami zjistili, že 9 z přítomných 10 žáků vnímá obdélník jako čtyři jeho strany. Zazněl názor jedné žákyně: „Podle mě obdélník jsou jen ty čáry a ne to uvnitř.“ Někteří ve skupině souhlasili s tvrzením spolužáka, že vyznačená úhlopříčka KM nepatří obdélníku, proto ani průsečík B úhlopříček nepatří obdélníku. Jiný žák odůvodnil zahrnutí bodu B mezi body patřící obdélníku: „... protože je spojený s těmi vrcholy“, na základě diskuze ve skupině však svůj názor změnil.

Ve druhé úloze na společné body přímky a trojúhelníku téměř všichni žáci z obou skupin odpověděli, že přímka má s trojúhelníkem společné 2 body. Shodli se na tom,

[22] V úloze 4 byl trojúhelník oproti ostré verzi testu nevybarvený.

[23] Útvary v obou úlohách byly oproti ostré verzi testu vybarvené.

[24] Žáci si představili spojnici vrcholu A s vnějším bodem D, na níž zdánlivě ležela těžnice.

že trojúhelník je tvořen jen třemi úsečkami a nemá žádné vnitřní body. Během rozhovorů v první skupině žáci poměrně brzy rozpoznali, že spolu předložené úlohy úzce souvisí. Souhlasili s tím, že pokud by bod F patřil trojúhelníku, pak má přímka s trojúhelníkem ve druhé úloze „hodně společných bodů“. Přiklonili se však k tomu, že bod F trojúhelníku nepatří. Žákyně ve druhé skupině uvažovala nahlas: „Možná, že by tam mohla být ještě ta úsečka mezi těma dvěma bodama.“ (myslí společnou úsečku přímky a trojúhelníku). Ostatní nesouhlasili, podle nich „už to pak není trojúhelník“ (8 žáků z 10). To, že jen jedna skupina měla v zadání trojúhelník vybarvený, nemělo na jejich rozhodování žádný vliv. Když jsme jim v rámci rozhovoru navíc v této druhé skupině předložili přímku, která procházela vrcholy A, C trojúhelníku (úloha 7b), nejdříve všichni volili odpověď 2 společné body. Jedna žákyně uvažovala: „Já bych zvolila odpověď 2, jako že A a C, nebo 1, jako že ona protíná jeden ten celek, že ona se nerozdvojuje. Vlastně ta úsečka AC leží na té přímce.“ Snažili jsme se žáky poté navést, že strana AC má s přímkou společných více bodů než 2, s čímž posléze váhavě souhlasili.

V obou skupinách bylo patrné, že většina žáků si nebyla jista svými odpověďmi a snadno se nechávali ovlivnit názory spolužáků či formulací kladených otázek.

Diskuze

Analýza výsledků úloh 4, 6 a 7 z ostré verze testu ukázala, že v testované skupině dětí na začátku druhého stupně vzdělávání nejsou významné rozdíly v řešení úloh mezi dívkami a chlapci. To dokládají výsledky uvedené v tab. 2, 4, 6 a 8. K obdobnému závěru dospěli například Ma et al. (2015) ve výzkumu geometrického myšlení žáků 6. ročníků. V našem výzkumu je možné si dále všimnout drobných rozdílů mezi těmito skupinami ve dvou případech. V úloze 6 s obdélníkem byli chlapci mírně úspěšnější, viz tabulka 4. To zřejmě souvisí s tím, že dívky volily chybnou odpověď označenou kódem AD častěji než chlapci. Obdobně v úloze 7b lze pozorovat, že chlapci více preferovali odpověď „1“ společný bod, zatímco dívky dávaly přednost odpovědi „2“ společné body. Na základě rozhovorů se žáky při zadávání pretestu (obr. 6) i po zadání ostré verze testu se domníváme, že chlapci si v úloze 7b lépe uvědomovali, že přímka s trojúhelníkem má společnou *jednu* stranu trojúhelníku, a proto volili odpověď „1“ společný bod, zatímco dívky se soustředily na dva vrcholy trojúhelníku ležící na zadané přímce, a proto označily možnost „2“ společné body. Obě uváděné odpovědi mohou souviset s neadekvátními žákovskými koncepty úsečky a jejích bodů, s čímž jsme se během rozhovorů setkali. Také Chodorová a Juklová (2017) uvádějí, že jen málo žáků čtvrtých a pátých ročníků, které testovaly, zvolilo z nabízených obrázků ty, které znázorňovaly všechny body úsečky určené jejími krajními body. K možným příčinám neadekvátních žákovských konceptů v našem šetření může patřit také záměna objektu a jeho modelu. Tento jev popsali Cihlář, Eisenmann a Krátká (2012) v souvislosti se zkoumáním představ o nekonečnu u žáků ve věku od 8 do 18 let. U většiny respondentů do dvanáctého roku identifikovali představu, že bodem geometrického objektu je pouze jeho význačný bod, např. vyznačený střed úsečky. Tento jev vysvětlují tím, že žák přisuzuje vlastnosti abstraktnímu objektu na základě jeho obrázku.

Rozbor výsledků žákovských řešení úloh 4 a 6 zaměřených na porozumění trojúhelníku a obdélníku jako částí roviny vymezených jejich stranami ukázal, že jen přibližně šestina žáků ve zkoumaném vzorku zodpověděla obě úlohy zcela správně. Zaměřili jsme se proto na jejich odpovědi v úlohách 4 a 6, ve kterých žák buď odpověděl zcela správně, či uvedl jen vnitřní body obou útvarů, případně zkombinoval obě možnosti. Takto odpovědělo 233 žáků z 505, tedy téměř polovina žáků si je vědoma, že vnitřní body obdélníku i trojúhelníku těmto útvarům náleží. χ^2 test nezávislosti ukázal, že žáci v těchto dvou úlohách nevolili své odpovědi nahodile. Další analýzou žákovských řešení jsme zjistili souvislost mezi opomíjením vrcholů[25] trojúhelníku v úloze 4 a obdélníku v úloze 6, v úloze 4 byla úspěšnost z hlediska zahrnutí vnitřních bodů o něco vyšší, což může být dáno tím, že trojúhelník byl v zadání vybarven.[26] Prostřednictvím rozhovorů se žáky jsme identifikovali tři možné příčiny, proč žáci neuváděli vrcholy u obou útvarů. Někteří se domnívali, že vrcholy trojúhelníku a obdélníku těmto útvarům nepatří, jen ho určují; druzí byli přesvědčeni, že vrcholy není třeba vzhledem k formulaci zadání uvádět (domnívali se, že „úloha se na vrcholy neptá“); část žáků na vrcholy jednoduše zapomněla. Také Budínová (2018) zjistila velmi nízkou úspěšnost žáků 4. ročníků v úloze, ve které měli z nabízených bodů určit ty, které náležejí nakreslenému trojúhelníku, správně odpovědělo jen 12 % žáků. Uvádí: „Žáci nemají jasnou představu o pojmech *vrchol* a *bod trojúhelníku*. Velká část z nich nepovažuje vnitřní body za body trojúhelníku.“ (Budínová, 2018: s. 7). Rovněž dospěla k obdobnému závěru, který vyplynul z našich rozhovorů se žáky, a to, že žáci zpravidla správně identifikují body na stranách trojúhelníku, resp. v našem šetření i obdélníku.

Při porovnání výsledků analýzy žákovských řešení úloh 4 a 7, resp. 6 a 7, se ukázalo, že úloha 7a (společné body trojúhelníku a přímky protínající ho v úsečce) byla pro žáky extrémně náročná, neboť ji správně vyřešila necelá 2 % žáků. Nejčastější chybnou odpovědí byly „2“ společné body. Žáci ze skupiny, se kterou probíhaly rozhovory za účelem odhalit příčiny této odpovědi, se až na dvě výjimky shodli na zdůvodnění, že jde o 2 průsečíky přímky a stran trojúhelníku, neboť trojúhelník tvoří jen jeho strany. I zde se ukazuje, že u žáků v mladším školním věku je koncept trojúhelníku často spojen s představou tří vrcholů a tří stran tohoto útvaru (Cutugno & Spagnolo, 2002). Uvedené zdůvodnění, že trojúhelník tvoří jen jeho strany, však nemůžeme aplikovat na celou zkoumanou skupinu, neboť téměř polovina žáků v ostré verzi testu uváděla vnitřní body trojúhelníku či obdélníku v řešení úloh 4 a 6; koncept trojúhelníku, resp. obdélníku, u těchto žáků tedy zahrnoval i jeho vnitřní oblast. Úloha byla zřejmě pro žáky náročná pro svou neobvyklost – tento typ problému se v učebnicích nevyskytuje. Chybnou odpověď mohl, v souladu s Tallem a Vinnerem (1981), podpořit i samotný obrázek v zadání úlohy 7a, kde byly dva průsečíky „viditelné“. K možnému vlivu obrázku na volbu chybné odpovědi přispívá i zjištění, ke kterému dospěli Eisenmann, Cihlář a Krátká (2012) ve svém výzkumu, a to, že žáci do dvanácti let často zaměňují geometrický objekt s jeho modelem. Uvádějí, že u těchto žáků se projevuje tzv. *princip tvůrce*, kdy žák například nevnímá střed úsečky, dokud není sestrojen. Také v našich rozhovorech se žáky jsme tento *princip tvůrce* identifikovali, jak je uvedeno výše.

Na základě analýzy učebnic matematiky pro první stupeň[27] základní školy se domníváme, že představu trojúhelníku jako tří úseček si žáci tvoří na základě empirického materiálu, který je jim zde předkládán – v souvislosti s trojúhelníkem se často hovoří především o jeho vrcholech a stranách. Ostatní vnitřní body trojúhelníku se zmiňují v učebnicích méně často,[28] v některých řadách učebnic prak-

[25] Jedná se o odpovědi, ve kterých žáci správně vybrali označené vnitřní body útvarů.

[26] To se však v následných rozhovorech s jinou skupinou žáků nepotvrdilo.

[27] Jedná se o učebnice pro první stupeň nakladatelství Alter, Fraus – Matematika se čtyřlístkem, Prometheus a Nová škola.

[28] Jde o úlohy typu: „Rozhodni, zda vyznačené body náležejí trojúhelníku.“

ticky vůbec. V analyzovaných učebnicích lze dobře vysledovat trend, kdy zpočátku, zejména v prvním a druhém ročníku, se žáci seznamují s trojúhelníky a obdélníky, které jsou vybarvené, případně je úkolem tyto útvary vybarvit, není však uvedeno proč. Vybarvování zde tak může působit jen jako hra, při níž žák setrvává s daným útvarem v kontaktu. Rozvíjení konceptu trojúhelníku jako rovinného útvaru nepodpoří podle našeho názoru ani zařazovaná práce s vystřihováním hmotných modelů trojúhelníků a obdélníků, pokud opět není doplněno vysvětlení.[29] V učebnicích pro další ročníky se trojúhelník, čtverec či obdélník v souvislosti s jejich rýsováním zobrazují bez vybarvení, tj. jsou znázorňovány jen svou hranicí. Snadno tak může vzniknout dojem, že vybarvené trojúhelníky byly jen součástí „obrázkového“ pojetí učiva v nižších ročnících a „správný“ je pouze ten trojúhelník, u něhož jsme narýsovali jeho hranici. Povědomí o vnitřních bodech trojúhelníku či obdélníku se tak pomalu vytrácí. Jakmile se žáci seznámí s pojmem úsečka, přichází v učebnicích označení jednotlivých částí trojúhelníku, resp. obdélníku a čtverce: strana, vrchol, případně úhlopříčka. Ve snaze přiblížit tyto pojmy žákům se v učebnicích objevují výroky, ve kterých je důraz kladen na hranici, například výrok: „Rovinné obrazce, které mají čtyři vrcholy a čtyři strany, nazýváme čtyřúhelníky.“ (Blažková et al., 2012: s. 31). Důraz je tedy kladen téměř výhradně na hranici (strany, vrcholy). Obrázky vybarveného trojúhelníku či obdélníku se v učebnicích opět objeví v kapitolách zaměřených na výpočet jejich obsahu, avšak v případě určování jejich obvodu jsou tyto útvary obvykle znázorněny pouze svou hranicí. Vnitřní body trojúhelníku a obdélníku tak nemusejí být samotnými žáky považovány za nedílnou součást trojúhelníku, ale pouze za „vnitřek“ uzavřené lomené čáry. Na vliv učebnic na porozumění žáků upozorňují rovněž Kupčáková (2017) i Budínová (2018). Budínová (2018) doplňuje k možným příčinám vzniku chybných představ trojúhelníku jako hraniční čáry aktivity spočívající v modelování pomocí dřívek či pomocí gumičky na geodesce.

Závěr

Naše výzkumná studie má svá omezení. Prvním z nich je skutečnost, že vzorek škol, na kterých bylo realizováno testování žáků, byl vybrán na základě dostupnosti. Vzorek zahrnoval jak základní školy, tak osmiletá gymnázia, avšak žádná z testovaných tříd nepracovala podle speciálního vzdělávacího plánu. Jednalo se o státní školy, jedna třída základní školy měla zaměření na matematiku. Druhé omezení se týká kvalitativní analýzy žákovských řešení. Při hodnocení úloh jsme vycházeli především z písemných řešení, pro hlubší analýzu však byly využity rozhovory s vybranými žáky, kteří se ostrého testování nezúčastnili.

Výzkumné šetření ukázalo, že ve zkoumané skupině 505 žáků 6. ročníků základních škol a prim osmiletých gymnázií nejsou podstatné rozdíly v konceptech trojúhelníku a obdélníku u dívek a chlapců. Dále bylo zjištěno, že přibližně u poloviny žáků se vyskytuje adekvátní koncept trojúhelníku a obdélníku, neboť tito žáci označili všechny nabízené vnitřní body. U druhé poloviny žáků se však často vyskytly odpovědi, které vypovídají o tom, že zřejmě rozumí trojúhelníkem či obdélníkem jen jeho strany. Tito žáci pravděpodobně nemají vytvořen adekvátní koncept trojúhelníku,

[29] Při rozhovorech se žáky 6. ročníků, kteří se shodli na tom, že trojúhelník je tvořen jen třemi stranami, jsme žákům připomněli vystřihování trojúhelníku z papíru. Požádali jsme je, aby si představili, jak trojúhelník či obdélník vystřihují, a zeptali se: „Když obdélník vystřihneme z papíru, jak by to vypadalo?“ Jeden z žáků odpověděl: „To bychom museli vystřihnout i ten vnitřek.“

resp. obdélníku. V obou uvedených skupinách se vyskytli žáci, kteří nezakroužkovali vrcholy útvarů. Vypozorovali jsme tři příčiny: vrcholy podle žáků nenáleží danému útvaru; žáci ze zadání úlohy nepochopili, že mají o nich rozhodnout; žáci na vrcholy zapomněli.

Chybný koncept trojúhelníku či obdélníku může žákům v budoucnu ztížit porozumění dalším pojmům. Pojmy trojúhelník, jeho vnitřní body a vrcholy nejsou ve škole zaváděny samoúčelně, ale postupně se dále využívají, například při zavádění nových pojmů jako těžnice, těžiště, výška. Rozlišování mezi útvarem a jeho hranicí je podstatné také při utváření pojmu tělesa a jeho částí. Stěny mnohostěnů jsou mnohoúhelníky, nikoli pouze uzavřené lomené čáry. Hranicí těchto n-úhelníků jsou pak lomené čáry tvořené úsečkami – hranami mnohostěnu, a hranicemi hran jsou body – vrcholy mnohostěnu. Nerozlišení útvaru od jeho hranice pak může způsobit žákům problémy při další práci s tělesy, například při identifikaci jejich stěn, určování řezů a práci se sítěmi.

Považuje-li žák například trojúhelník pouze za uzavřenou lomenou čáru, může to také být jednou z příčin zaměňování obsahu a obvodu útvaru. V důsledku chybějících izolovaných a univerzálních modelů může u žáků docházet k osvojení pouze formálních znalostí (Hejný & Kuřina, 2001).

Z výše uvedeného nahlédnutí do učebnic je také patrné, že samy učebnice neobjasňují žákům pojmy trojúhelník a obdélník často dostatečně. V průběhu prvního stupně dochází k přechodu od útvarů vybarvených k nevybarveným bez potřebného vysvětlení a zdůvodnění, což nepodporuje jasné porozumění těmto pojmům. Tato tendence opouštět vybarvené útvary a přecházet postupně k jejich reprezentaci jen pomocí narýsované hranice bez vysvětlení pak může napomáhat omezení představy trojúhelníku a obdélníku na jeho hranici. Situaci dále komplikují popisy útvarů orientované na jejich vrcholy a strany. V učebnicích nejsou tyto problémy dostatečně okomentovány, řádné vysvětlení je tak přeneseno na učitele.

Do výuky na prvním stupni vzdělávání by měly být více zařazovány úlohy, v nichž žáci pracují s libovolnými vnitřními body trojúhelníků a čtyřúhelníků. Kromě úloh z učebnic, reálných modelů a manipulativních činností s nimi, by se žáci měli častěji setkávat s úlohami z reálného světa, v nichž si vizualizují koncepty těchto pojmů a konfrontují je se svými, často neformálními, koncepty.

Poděkování

Článek vznikl za podpory programu Univerzitní výzkumná centra UK, č. UNCE/HUM/024, a projektu PROGRES Q17 *Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.*

Literatura

Blažková, R., Vaňurová, M., Matoušková, K. & Staudková, H. (2012). *Matematika pro 3. ročník ZŠ, 2. díl.* Praha: Alter.

Budínová, I. (2017). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy. *Učitel matematiky*, 25(2), 65–82.

Budínová, I. (2018). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: trojúhelník a kruh. *Učitel matematiky*, 26(1), 1–11.

Cihlář, J., Eisenmann, P. & Krátká, M. (2012). Jak žáci a studenti chápou nekonečno? *Matematika – fyzika – informatika*, 21(6), 321–341.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (420–464). New York: Macmillan.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. & Sarama, J. (1999). Young children' s concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192–212. Dostupné z https://psycnet.apa.org/doi/10.2307/749610

Cutugno, P. & Spagnolo, F. (2002). Misconceptions about triangle in elementary school. In A. Rogerson (Ed.), *Conference The Mathematics Education into the 21st Century Project* (89–93). Italy, Palermo.

Čáp, J. & Mareš, J. (2001). *Psychologie pro učitele.* Praha: Portál.

Dağlı, Ü̇. Y. & Halat, E. (2016). Young children' s conceptual understanding of triangle. *Euroasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(2), 189–202. Dostupné z https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1398a

Hadamard, J. (2008). *Lessons in geometry I: Plane geometry.* USA: American Mathematical Society.

Hejný, M. & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha: Portál.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61–76.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der geometrie.* Leipzig: B. G. Teubner.

Chodorová, M. & Juklová, L. (2017). Geometrické pojmy na základní škole. *Matematika – fyzika – informatika*, 26(4), 261–271.

Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha: PedF UK.

Jirotková, D. & Littler, G. (2003). Student's concept of infinity in the context of a simple geometrical construct. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of PME 27*, vol. 3 (123–132). Honolulu: University of Hawaii.

Kalhous, Z. & Obst, O., et al. (2009). *Školní didaktika.* Praha: Portál.

Kupčáková, M. (2017). Geometrické kurikulum na 1. stupni. In K. Sebínová, L. Gerová, P. Voštinár (Eds.), *Zborník príspevkov z vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou Primárne matematické vzdelávanie – teória, výskum a prax* (76–80). Banská Bystrica: UMB.

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice.* Praha: SPN.

Ma, H.-L., Lee, D.-C., Lin, S.-H., & Wu, D.-B. (2015). A study of Van Hiele of geometric thinking among 1st through 6th graders. *Euroasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(5), 1181–1196. Dostupné z https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1412a

Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children' s views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179–196. Dostupné z https://doi.org/10.1023/A:1004175020394

MŠMT. (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha.

MŠMT. (2018). *Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání.* Praha.

Průcha, J., Walterová, E. & Mareš, J. (2009). *Pedagogický slovník.* Praha: Portál.

Prokopová, M. & Rys, P. (2003). Pojetí bodu a jeho vztahu ke přímce: komparace fylogeneze a ontogeneze. In *Sborník 4. konference Matematika v škole dnes a zajtra* (s. 5). Ružomberok: PedF, Katolícká univerzita v Ružomberoku.

Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E. & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: UK, PedF.

Servít, F. (1907). *Eukleidovy Základy.* Praha: JČM.

Škoda, J. & Doulík, P. (2011). *Psychodidaktika.* Praha: Grada Publishing.

Tall, D. & Vinner, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.

Tirosh, D., Tsamir, P., Tabach, M., Levenson, E. & Barkai, R. (2011). Geometrical knowledge and geometrical self-efficacy among abused and neglected kindergarten children. *Scientia in educatione*, 2(1), 23–36.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orlando: Academic Press.

Vighi, P. (2004). The triangle as a mathematical object. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 2003.* Bellaria: Italy, University of Pisa and ERME.

Jarmila Robová, jarmila.robova@mff.cuni.cz
Vlasta Moravcová, vlasta.moravcova@mff.cuni.cz
Zdeněk Halas, zdenek.halas@mff.cuni.cz
Jana Hromadová, jana.hromadova@mff.cuni.cz
Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, Česká republika