

## Výzkumy vlivu některých typů technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice

*Jarmila Robová*

### Abstrakt

Článek je věnován přehledu a analýze našich i zahraničních výzkumů, které se zabývají vlivem technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice v období od devadesátých let dvacátého století až po současnost. Postupně jsou prezentovány a rozebírány metody i výsledky experimentů zaměřených na používání některých typů technologií, a to grafických kalkulátorů, programů dynamické geometrie a webových výukových zdrojů. Pozornost je věnována zejména relevantním výzkumům, které zkoumaly začlenění uvedených technologií do vyučování matematice na úrovni střední školy. Závěrem jsou shrnuty hlavní přínosy a rizika integrace těchto technologií a uvedeny současné trendy jejich integrace.

**Klíčová slova:** střední škola, vyučování matematice, vědomosti, dovednosti, technologie.

## Research on the Effects of Some Types of Technology on Pupils' Knowledge and Skills in Mathematics

### Abstract

The article presents an overview and analysis of the research concerning the influence of technology on pupils' knowledge and skills in mathematics in the period since the nineties of the twentieth century to the present. There are presented and discussed methods and results of the experiments focused on the use of some types of technologies such as graphic calculators, dynamic geometry software and internet. In conclusion, the article refers to current trends of technology integration and summarizes the main merits and risks associated with its use in mathematics education.

**Key words:** secondary school, mathematics teaching, knowledge, skills, technology.

# 1 ÚVOD

V souvislosti se snahou o přiblížení obsahu i pojetí vzdělávání potřebám společenského a technického vývoje se postupně mění vyučování na různých stupních vzdělávacího systému. Jedním z nejvýraznějších trendů posledních desetiletí je zavádění technologií do procesu vzdělávání a vyučování, a to nejen v matematice. Zkušenosti u nás i ve světě ukazují, že využívání informačních a komunikačních technologií (dále jen ICT) může přispívat ke zkvalitnění vyučovacího procesu, a to především z hlediska aktivizace žáků i zvýšení názornosti a efektivity výuky.

K základním faktorům, které z hlediska vzdělávání ovlivňují integraci ICT, patří podle Walterové et al. (2004), Neumajera (2007) a Saka et al. (2007):

- státní informační politika ve vzdělávání,
- začlenění ICT do kurikula,
- postoje škol a učitelů k počítačovým technologiím,
- vybavenost škol počítači, včetně připojení k internetu,
- počítačové dovednosti učitelů,
- dostupnost kvalitních programů využitelných ve výuce.

Uvedené faktory na sebe vzájemně působí a doplňují se, podstatnou roli hraje postoj učitele k technologiím, neboť využívání ICT ve výuce rozhodujícím způsobem ovlivňují metodické dovednosti vyučujícího (Burill et al., 2002; Kastberg, Leatham, 2005).

K nejvíce používaným prostředkům ICT ve výuce matematiky dnes patří kapesní kalkulátory, počítače s vhodnými programy, interaktivní tabule a internet. Podíváme-li se do nedávné historie, pak jako první z nich se na základních i středních školách přes počáteční výhrady prosadily kapesní kalkulátory. Nejčastější námitkou proti jejich používání bylo, že pod vlivem kalkulátorů dojde k zhoršení početních dovedností žáků. Je to pochopitelné, neboť tehdejší kalkulátory do výuky matematiky přinášely především usnadnění numerických výpočtů, přičemž zvládnutí základních početních operací představuje důležitou náplň učiva v nižších ročnících základní školy. Vzhledem k tomu, že závěry experimentálních studií u nás i ve světě tyto obavy nepotvrdily, byl počátkem osmdesátých let kalkulátor zařazen jako doporučená pomůcka do osnov matematiky základních škol ve většině vyspělých zemí (Květoň, 1983).

V osmdesátých a devadesátých letech se na školách začaly používat osobní počítače, avšak nebylo běžné je používat při výuce jiných předmětů, než je programování. To bylo dáno jednak tehdejší malou připraveností učitelů na práci s počítači, jednak i nedostatkem vhodných matematických programů pro základní a střední školu. Proto se v západních státech Evropy a v USA začaly používat nové typy kapesních kalkulátorů, tzv. grafické, které umožňují zobrazovat grafy funkcí. Zdokonalování matematických programů v devadesátých letech umožnilo postupně řešit matematické problémy v symbolické rovině prostřednictvím počítačových algebraických systémů. Vývoj geometrických programů přinesl na přelomu tisíciletí do výuky matematiky metody modelování a experimentování s geometrickými objekty, přičemž tyto metody se opírají o dynamické vlastnosti těchto programů. Přibližně ve stejnou dobu vstoupil do škol internet, o něco později i interaktivní tabule.

V další části se budeme zabývat výzkumy vlivu vybraných technologií na proces vyučování matematice, které byly realizovány od devadesátých let dvacátého století až po současnost. Konkrétně se zaměříme na integraci grafických kalkulátorů, programů dynamické geometrie a webových výukových zdrojů.

## 2 VÝZKUMY VLIVU GRAFICKÝCH KALKULÁTORŮ NA VĚDOMOSTI A DOVEDNOSTI ŽÁKŮ

Hlavní přínos grafických kalkulátorů spočívá v možnosti vizualizace matematických objektů na obrazovce v grafickém režimu. Grafické příkazy kalkulátorů umožňují zobrazovat zejména grafy funkcí a zkoumat jejich vlastnosti.

V posledních dvaceti pěti letech bylo ve světě realizováno mnoho výzkumů zaměřených na používání grafických kalkulátorů ve výuce matematiky, a to zejména z hlediska změn v procesu vyučování i z hlediska výkonu žáků v testech vědomostí a dovedností. Získané výsledky nelze jednoduše generalizovat, neboť jednotlivé studie se liší v mnoha ohledech – v různorodosti použité metodologie i přístupu k hodnocení a interpretaci výsledků. Je zajímavé, že se částečně liší i závěry sekundárních souhrnů výzkumných šetření a meta-analýz těchto výzkumů, jak také uvádějí Roschelle a Gallagher (2005).

### 2.1 GRAFICKÉ KALKULÁTORY BEZ CAS<sup>1</sup> TECHNOLOGIE

Články publikované během devadesátých let v USA se zabývaly využitím grafických kalkulátorů v tematických celcích souvisejících s pojmem funkce a jejími vlastnostmi (Mercer, 1995), rozvíjením některých matematických dovedností (Dion, 1990; Hirschhorn, Thompson, 1996) a řešením reálných problémů (Day, 1996). V souvislosti s využíváním kalkulátorů ve školské matematice byl předmětem zájmu odborníků jejich vliv na úroveň matematických vědomostí a dovedností žáků v testech, včetně sledování změn v postojích žáků k matematice.

Výzkumy, jež byly zaměřeny na porovnání výkonnosti ve standardizovaných matematických testech, porovnávaly výsledky žáků z kurzů matematiky, ve kterých žáci pracovali s grafickými kalkulátory, s výsledky žáků z klasických kurzů. Studie Ruthven (1990), Quesada, Maxwell (1992) a Harvey (1993) (cit. v Dunham, Dick, 1994) zjistily statisticky významné rozdíly ve prospěch skupin s grafickými kalkulátory, jiné jako Rich (1991) a Army (1992) k žádným významným rozdílům mezi experimentálními a kontrolními skupinami nedospěly. Existuje také experiment (Giamati, 1991; cit. v Dunham, Dick, 1994), jehož výsledkem je, že kontrolní skupina dosáhla lepších výsledků. Výsledky těchto studií jsou však těžko vzájemně porovnatelné, neboť v některých skupinách žáci mohli v testech používat grafické kalkulátory, v jiných tomu tak nebylo. Navíc ve všech uvedených studiích nebyly zajištěny stejné osnovy a materiály pro porovnávané skupiny.

Z hlediska vlivu grafických kalkulátorů na porozumění různým matematickým pojmům ukázaly výzkumy citované v souhrnné studii Dunham, Dick (1994) a v metaanalýze Khoju, Jaciw, Miller (2005),<sup>2</sup> že žáci používající grafické kalkulátory do-

---

<sup>1</sup>CAS – *Computer Algebra System*. Jedná se o typ matematického software, který umožňuje pracovat nejen s čísly, ale i se symboly, např. zjednodušovat algebraické výrazy, počítat derivace i neurčité integrály aj. Někdy se těmto programům říká systémy počítačové algebry.

<sup>2</sup>Dunham a Dick (1994) uvádějí analýzu výzkumů z let 1989–1993, Khoju, Jaciw, Miller (2005) z let 1990–2001. Tyto analýzy se překrývají v jediném výzkumu, který realizoval Ruthven (1990).

sahovali lepších výkonů v následujících oblastech:

- přiřazování grafů funkcí k jejich předpisům,
- čtení a interpretaci grafických informací,
- získání více poznatků z grafu funkce,
- chápání souvislostí mezi grafickou, numerickou a algebraickou reprezentací,
- porozumění obecným vlastnostem funkcí,
- osvojení si více předpisů konkrétních elementárních funkcí.

Další okruh otázek výzkumu výuky s grafickými kalkulátory se zaměřil na řešení úloh (*problem solving*). Podle výše citovaných výzkumů a jejich analýz žáci, kteří běžně řeší úlohy s touto pomůckou,

- jsou flexibilnější v přístupu k řešení úloh,
- jsou vytrvalejší v hledání řešení,
- soustřeďují se na podstatu problému a ne na algebraickou manipulaci,
- úspěšně řeší nerutinní problémy,
- mají pozitivní vztah k této pomůcce a jsou přesvědčeni, že jim pomáhá zlepšit jejich schopnost řešit úlohy.

Grafické kalkulátory se postupně prosadily do školské matematiky i v evropských zemích. V Německu byl v letech 1991–1994 realizován čtyřletý experiment, který se zabýval integrací grafických kalkulátorů a následnou změnou metod i cílů matematického vzdělávání od 9. do 12. ročníku. Učitelé v pokusných třídách kladně hodnotili dodávané materiály i změny, které do výuky grafické kalkulátory přinesly – empirické metody zkoumání a zvýšení sebekontroly žáků (Flade, Lichtenberg, Pruzina, 1992; Hentschel, Pruzina, 1995).

Podobné pokusné vyučování s využitím grafických kalkulátorů na úrovni střední školy bylo zahájeno v devadesátých letech v Polsku, Maďarsku a v České republice. Jednalo se však o menší experimenty v jedné či dvou třídách. Výsledky ukázaly vhodnost zařazení této pomůcky do tematických okruhů *funkce*, *rovnice* a potvrdily, že na grafický kalkulátor spoléhají především slabší žáci a že to, zda žáci dávají přednost grafickým metodám řešení před algebraickými, závisí na přístupu učitele. Čtyřletý výzkum<sup>3</sup> na pražském gymnáziu ve školních letech 1992/1993 až 1995/1996 dospěl k obdobným závěrům. Statistické zpracování a kvalitativní rozbor testových výsledků žáků experimentální a srovnávací skupiny ve druhém a čtvrtém roce výzkumu ukázaly, že nejsou výrazné rozdíly mezi skupinami; chyby, které se vyskytly ve srovnávací skupině a které souvisely s neporozuměním daným pojmem, se však v experimentální skupině neobjevily (Robová, 1998). Tento fakt podpořil závěry zahraničních výzkumů, které poukazyvaly na lepší porozumění pojmem v experimentálních skupinách.

---

<sup>3</sup>Výzkum byl realizován na pražském gymnáziu v jedné třídě s 28 žáky po dobu čtyř let; kontrolní skupinu ve druhém a čtvrtém roce výzkumu tvořily tři třídy. Výzkum byl zaměřen na vytváření a ověřování vhodných metodických postupů a výukových materiálů pro integraci grafického kalkulátoru v jednotlivých tématech středoškolské matematiky. Součástí výzkumu bylo sledování práce i výsledků žáků v podmínkách školní výuky podle platných osnov.

I v následujících letech byla ve světě věnována pozornost přínosu i důsledkům integrace grafických kalkulátorů do výuky matematiky. Dále se podrobněji podíváme na studie Burrill et al. (2002), Ellington (2003) a Kastberg, Leatham (2005), které se zaměřily na srovnávací analýzu výzkumů užití kalkulátorů v hodinách středoškolské matematiky. Analyzované výzkumy měly převážně kvantitativní charakter a v řadě z nich byla použita metoda pre-testu a post-testu; testy psali žáci v experimentálních i srovnávacích skupinách.

Burrill et al. (2002) se ve své studii mezi jiným zaměřili na porovnání 43 sledovaných výzkumů z hlediska

- typu matematických úloh, ve kterých žáci volili řešení s využitím grafického kalkulátoru, a způsobu jejich práce s touto pomůckou,
- charakterizace matematických vědomostí a dovedností, které se žáci naučili s podporou kalkulátoru.

Bylo zjištěno, že přístup učitele k této pomůcce a vyučovací metody hrály významnou roli ve způsobu, jakým žáci využívali tuto technologii. Žáci pochopitelně preferovali metody a postupy, které jim předkládali jejich učitelé, a pomůcku využívali zejména ke grafickému řešení problému či k vizualizaci situace. Grafické kalkulátory byly nejvíce používány v algebře, dále při výuce funkcí a v úvodu do diferenciálního počtu. Výsledky srovnávacích testů ukázaly, že v těchto tématech pomůcka přispěla zejména k hlubšímu pochopení pojmu proměnná a funkce. Z hlediska typu a úrovně osvojených matematických dovedností byl opět důležitý přístup učitele – pokud se ve svých hodinách zaměřil na řešení aplikačních úloh s podporou kalkulátoru, vykazovali jeho žáci lepší výsledky v testových otázkách zaměřených právě na tuto problematiku.

Ellington (2003) se ve své metaanalýze 54 výzkumných studií zaměřila na otázky související zejména s vlivem užívání grafického kalkulátoru na osvojování pojmů a rozvíjení matematických dovedností (*conceptual, computational, operational, problem solving skills*). Porovnávané výzkumy rozdělila do dvou skupin podle toho, zda žáci směli používat v testech kalkulátor, či nikoliv. Zjistila, že pokud žáci nemohli používat tuto pomůcku v testech, byly jejich výsledky signifikantně lepší pouze v úkolech zaměřených na testování operačních dovedností (*procedural skills*<sup>4</sup>). Pokud žáci při psaní testu pracovali s kalkulátorem, dosahovali lepších výsledků i v dalších dovednostech. Dále také sledovala, zda se tyto závěry lišily podle toho, zda se jednalo o standardizované testy, či testy vytvořené výzkumníky. V nestandardizovaných testech žáci užívající grafický kalkulátor dosáhli výrazně lepších výsledků nejen v operačních dovednostech, ale i v porozumění pojmům. Uvedené výsledky naznačují, že některé zaznamenané pozitivní jevy souvisejí s povolením kalkulátoru v testech a se souladem úkolů řešených ve výuce a v testech. Šetření TIMSS v roce 1999 však ukázalo, že vztah mezi používáním kalkulátoru a výsledky žáků v testech může být obecně ovlivněn i kulturními a regionálními souvislostmi, neboť zatímco data z USA vykazovala pozitivní souvislosti mezi užíváním této pomůcky a výsledky žáků, v Japonsku byl tento vztah neutrální až negativní (Roschelle, Gallagher, 2005).

Kastberg a Leatham (2005) analyzovali 38 výzkumných studií a soustředili se na tři okruhy otázek souvisejících s využíváním grafických kalkulátorů ve vztahu k výkonu žáků, tj. k výsledkům v testech vědomostí a dovedností, včetně zkoumání žákovských postupů při řešení úloh:

---

<sup>4</sup>Jedná se o dovednosti správně používat pravidla, algoritmy a postupy, včetně jejich odpovídající reprezentace, tj. formy i syntaxe.

- dostupnost grafických kalkulačků v hodinách matematiky,
- místo této pomůcky v matematickém kurikulu,
- způsoby použití kalkulačku ve školské praxi.

Dostupnost kalkulačků pro žáky byla ovlivněna především postoji učitelů k této technologii a jejich názory na to, jakou roli hraje tato pomůcka v procesu vyučování a učení. Současně postoj učitelů ovlivnily zpětně výsledky žáků při řešení úloh za podpory grafického kalkulačku. Výzkumy ukázaly, že žáci s dlouhodobým používáním grafických kalkulačků v hodinách matematiky vykazovali širší spektrum strategií řešení problémů než žáci srovnávacích skupin a že častěji používali grafické postupy. I když se jednoznačně neprokázalo, že pro kvalitu výkonu žáků je rozhodujícím faktorem délka a četnost používání kalkulačku, ukázalo se, že při krátkodobém a nahodilém používání nepodali žáci experimentální skupiny takový výkon jako žáci kontrolní skupiny. V některých studiích však byly pozorovány případy, kdy i při krátkodobé integraci této pomůcky do výuky došlo ke zlepšení výsledku žáků v testech vědomostí a dovedností. Analýza realizovaných výzkumů rovněž ukázala, že pro uplatnění přínosu kalkulačků z hlediska výkonu žáků hrálo důležitou roli propojení kurikula s použitými metodami. Výsledky studií byly v tomto ohledu opět nesourodé, ale poukázaly na následující tendence: Pokud byly grafické kalkulačkové pouze „přidány“ do kurikula jako povinná pomůcka a nezměnily se přitom učební materiály a metody, nebyli žáci schopni spojovat různé reprezentace matematického problému, které získali pomocí kalkulačku. V případě, že integrace kalkulačku do kurikula souvisela i s pozměněnými učebními materiály a zařazením problémových, resp. konstruktivistických<sup>5</sup>, metod vyučování, žáci úspěšně řešili v testech i tradiční úlohy. Domníváme se, že poslední jev nelze přímočaře interpretovat jako důsledek integrace grafického kalkulačku, neboť konstruktivistické metody vyučování se významnou měrou podílejí na úrovni osvojení vědomostí. Současně hraje důležitou roli skutečnost, zda učitel vnitřně přijal nové osnovy i doporučené metody, tedy zda je skutečně uplatňuje v praxi. Z uvedeného vyplývá, že úspěšná integrace grafických kalkulačků do praxe úzce souvisí s informovaností, postoji a přípravou učitelů matematiky.

Tyto výsledky podpořil výzkum realizovaný v roce 2004 na 458 středních amerických školách, který se zabýval vztahem mezi používáním grafických kalkulačků v hodinách matematiky, profesními kompetencemi učitelů a výsledky žáků v testech v kurzu algebry. Testové skóre žáků se zvyšovalo, čím déle pracovali s kalkulačkou a čím více se jejich učitelé věnovali svému dalšímu vzdělávání v této oblasti (Heller et al., 2005). Pozitivní vliv této pomůcky doložily také výsledky národních standardizovaných výkonnostních testů<sup>6</sup> (*achievement tests*) v USA, které ukázaly korelaci mezi výkony žáků v těchto testech a četností užívání kalkulačků v hodinách matematiky.

Jak vyplývá z výše uvedených výzkumů, v centru pozornosti byla a nadále je otázka, jak ovlivňuje užívání grafických kalkulačků vědomosti a dovednosti žáků

<sup>5</sup>Pro konstruktivně pojaté vyučování matematice je charakteristické aktivní vytváření části matematiky v duševním světě dítěte (Hejný, Kuřina, 2009, s. 196). Tento přístup vychází podle Hejného a Kuřiny z deseti zásad, ke kterým patří chápání matematiky jako specifické lidské aktivity, řešení úloh a hledání souvislostí, konstrukce poznatků s využitím zkušeností, vytváření podnětného prostředí, sociální interakce, různé reprezentace problému, komunikace. Konstruktivistický přístup k výuce je založen na aktivní a tvořivé činnosti žáka.

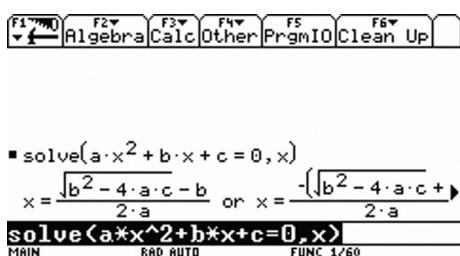
<sup>6</sup>Jednalo se o celostátní testy v letech 1996, 2000, 2003, 2005.

v matematice ve srovnání s žáky, kteří tuto technologii nepoužívají. Shrňeme-li prokázaný přínos užití grafických kalkulačků v této oblasti, patří sem především:

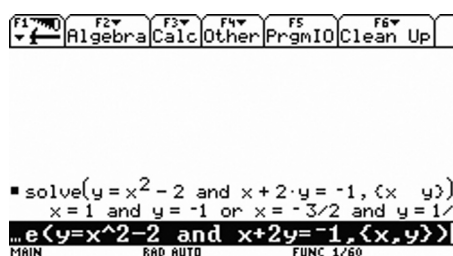
- hlubší porozumění některým matematickým pojmům (zejména pojem funkce, derivace, limita, proměnná a parametr),
- zlepšení schopnosti propojovat různé reprezentace matematického problému (numerická, symbolická, grafická),
- rozšíření spektra strategií řešení.

## 2.2 GRAFICKÉ KALKULÁTORY S CAS TECHNOLOGIÍ

Přibližně v posledních deseti letech se ve středoškolské matematice v některých zemích, jako jsou Francie, Rakousko, Švýcarsko a USA, prosazují grafické kalkulačky typu CAS, které jsou kromě grafického režimu vybaveny programem počítačové algebry (obr. 1 a 2).



Obr. 1 TI-92, obecné řešení kvadratické rovnice



Obr. 2 TI-92, řešení soustavy rovnic

Používání CAS kalkulačků, resp. CAS software, vyvolává obdobné otázky, jako tomu bylo při zavádění klasických kalkulačků i prvních grafických typů. Konkrétně se jedná zejména o obavy, zda používání těchto typů nevede ke snižování žákovských dovedností z hlediska symbolických manipulací s matematickými objekty.

Již první výzkumy naznačily, že integrace CAS kalkulačků do školské matematiky je náročná pro samotné učitele. K tomu, aby učitel mohl uplatnit potenciál technologií tohoto typu ve svých hodinách, musí se s ní nejdříve sám dobře seznámit, následně vytvářet vhodné úlohy pro žáky a pozměnit vyučovací metody.

CAS kalkulačky i software ovlivňují také postupy a metody řešení úloh, proto součástí některých výzkumů bylo sledování přístupu žáků k řešení matematických úloh, používány byly kvantitativní (výsledky testů) i kvalitativní (záznamy a rozbor práce žáků) metody. Žáci pracující s těmito technologiemi vykazovali oproti kontrolní skupině větší rozmanitost strategií řešení a nevyhýbali se ani tradičním postupům bez podpory CAS (Powers et al., 2005). Užívání technologií tohoto typu podporovalo „matematické sebevědomí“ žáků, kteří často volili vlastní cesty zkoumání daného problému a experimentovali se vstupními údaji úlohy. Obecně lze říci, že užívání CAS přispívá k experimentování s matematickými objekty a usnadňuje žákům práci ve fázi hledání řešení. K nejčastěji používaným režimům CAS technologií patřily režim grafický a režim symbolický (Weigand, Bichler, 2010).

### 2.2.1 VÝZKUMY ZAMĚŘENÉ NA VÝKON ŽÁKŮ V TESTECH

Velká pozornost byla v posledních letech věnována i vlivu kalkulačků typu CAS na výkony žáků v testech. Ve většině případů se jednalo o testování vědomostí a do-

vedností v tématech z algebry a z teorie funkcí. Výzkumy zaměřené na tuto problematiku převážně používaly kvantitativní metodu založenou na porovnání výsledků žáků experimentální a kontrolní skupiny, a to v pre-testech a post-testech, resp. ve výkonnostních (*achievement tests*) či průběžných testech. V uváděných výzkumech se v rámci kvantitativních šetření nepodařilo prokázat signifikantní rozdíly ve výkonu žáků obou skupin, což mohlo být ovlivněno skutečností, že žáci nesměli v testech používat CAS kalkulátor (Ng et al., 2005; Powers et al., 2005; Weigand, Bichler, 2010). Některé studie získaly v prvním roce výzkumu lepší výsledky u experimentální skupiny, další pokračování však tento výsledek nepotvrdilo (Schmidt et al., 2009; Weigand, Bichler, 2010). I když se nepodařilo jednoznačně prokázat pozitivní vliv CAS technologií na výkony žáků, dosahovali žáci experimentálních tříd lepších výsledků v některých matematických tématech; tyto okruhy se však v jednotlivých výzkumech lišily. Přes „negativní“ výsledky sledovaných šetření lze tyto závěry interpretovat také tak, že byly nepřímou vyvráceny obavy ze snižování výkonu žáků pod vlivem užívání CAS technologií.

Řada výzkumných šetření věnovaných problematice užití CAS ve středoškolské, resp. vysokoškolské matematice měla krátkodobý charakter. Existují však také studie, které byly dlouhodobé, kdy experiment probíhal alespoň jeden školní rok, nikoliv jen několik týdnů. K takovým výzkumům patří studie Schmidt et al. (2009) realizovaná ve školních letech 1999/2000 až 2003/2004. Ve výzkumu byl sledován vliv CAS kalkulátorů na výkony žáků v testech na osmi německých středních školách. Všichni žáci 10. ročníků na těchto školách dostali na další tři roky k dispozici CAS kalkulátory TI-89, které používali během vyučování, v domácí přípravě i u zkoušek; kontrolní skupinu tvořili žáci z šesti jiných středních škol. Výzkum měl kvantitativní charakter, byly v něm zkoumány

- rozdíly ve výkonech žáků experimentálních a srovnávacích tříd v souvislosti s matematickou úrovní daného kurzu matematiky (základní, pokročilý, speciální),
- tematické okruhy středoškolské matematiky vhodné pro užití CAS kalkulátorů.

Výkony žáků byly hodnoceny formou testu, který žáci obou skupin psali vždy v 11. ročníku v prvním pololetí. V průběhu testu nesměli žáci používat žádný typ kalkulátoru. Testy výkonu byly postupně zadávány v letech 2000 až 2004. Výsledky experimentu byly různorodé. Žáci experimentálních tříd ze základních a pokročilých kurzů dosáhli v roce 2004 vyššího hodnocení, avšak žáci ze speciálních kurzů byli horší než srovnávací skupina odpovídající matematické úrovni.<sup>7</sup> Při porovnání výsledků testů za celé období experimentu byli žáci pracující s CAS technologiemi lepší než žáci srovnávacích tříd v 7 případech z 10, ve zbývajících případech dosáhli srovnatelných výsledků. Nebyl zjištěn obecný trend, který by ukázal souvislost mezi vlivem CAS a úrovní matematického kurzu. Výsledky však naznačily, že přínos CAS se uplatnil více v pokročilých kurzech matematiky než v kurzech základních. V každém z pěti okruhů matematiky (úpravy výrazů; řešení rovnic a nerovnic; geometrie – obsahy, objemy; funkce a jejich grafy; pravděpodobnost), ze kterých se skládaly testové otázky, dosáhli žáci experimentální skupiny v průměru lepších výsledků než srovnávací skupina. V průběhu let se však měnil tematický okruh, ve kterém tito žáci dosáhli nejvyšších výsledků.

---

<sup>7</sup>Žáci, kteří navštěvovali speciální kurz, tj. kurz s nejvyšší úrovní matematiky, byli testováni pouze v roce 2004.



## 2.2.2 VÝZKUMY ZAMĚŘENÉ NA POROZUMĚNÍ POJMŮM

V souvislosti s výkony žáků v testech se pozornost soustředila také na přínos CAS z hlediska porozumění matematickým pojmům a vztahům. K posouzení tohoto vlivu byly použity kvantitativně-kvalitativní analýzy, tj. statistické zpracování výsledků žáků v testech, doplněné pozorováním v hodinách, rozborů záznamů práce žáků včetně rozhovorů se žáky (Schmidt et al., 2009; Wiegand, Bichler, 2010), resp. pouze kvalitativní analýzy (Powers et al., 2005; Gantz, 2008). Tento rozbor poukázal na to, že CAS podporuje porozumění zejména algebraickým pravidlům, řešení rovnic i symbolickým manipulacím (Gantz, 2008), dále funkcím a jejich grafům, přechodům mezi různými reprezentacemi problému (Böhm et al., 2004; Weigand, Bichler, 2010). Je třeba však upozornit na to, že závěry výzkumů mohly být ovlivněny kurikulem v daném regionu, přístupem učitelů k tématu i zvolenými vyučovacími metodami. Například Weigand a Bichler (2010) nezjistili v experimentálních skupinách lepší porozumění pojmu proměnná, zatímco výzkumy z konce devadesátých let ano (Böhm et al., 2004). Vzhledem k tomu, že porozumění pojmům u žáků pracujících s CAS technologiemi ve sledovaných šetřeních bylo stejné, nebo lepší než v kontrolní skupině, nemělo užívání CAS na tyto žáky negativní dopad.

Ve školním roce 2003/2004 byl zahájen na německých gymnáziích dlouhodobý výzkum s plánovaným výhledem do roku 2012 (Weigand, 2008; Weigand, Bichler, 2010). První tři roky se projektu opakovaně zúčastnili žáci 10. ročníků v šesti třídách, od školního roku 2006/2007 byl projekt implementován v 11. ročnících v šestnácti třídách. Žáci experimentálních tříd používali CAS kalkulátory Voyage 200 a v 11. ročnících i TI-Nspire<sup>8</sup>, a to při vyučování, v domácí přípravě i u zkoušek, avšak ne v pre-testech a post-testech; srovnávací skupinu tvořili žáci ze stejných škol. Kromě kvantitativních metod byly použity kvalitativní metody zkoumání (videonahrávky hodin, dotazníky, rozbor práce žáků). Vedle postoje učitelů i žáků k CAS technologiím se výzkum zaměřil na dvě hlavní otázky:

- Lze zjistit rozdíly v základních matematických dovednostech žáků experimentální a srovnávací skupiny?
- Lze pozorovat rozdíly vlivu CAS technologií na „dobré“ a „slabší“ žáky?

Výsledky žáků 10. ročníků v pre-testech a post-testech ukázaly, že experimentální skupina dosáhla lepších výkonů v oblasti práce s grafy funkcí i v přechodu mezi různými reprezentacemi daného problému; nebyly však pozorovány rozdíly z hlediska chápání pojmu proměnná či při práci s výrazy a tabulkami funkčních hodnot. Testy v 11. ročnících však lepší výkony žáků experimentální skupiny nepotvrdily. Podobně tomu bylo i s vlivem technologií tohoto typu na matematické dovednosti žáků podle jejich úrovně – zlepšení se ukázalo u slabších a průměrných studentů v 10. ročnících, v dalších letech vykazovali zlepšení nadprůměrní žáci 11. ročníků. Způsoby, jakým žáci používali CAS technologie při řešení úloh, úzce souvisely se zadáním úloh (například formulace „sestrojte graf“ vedla žáky k užití grafického režimu) a také s postupy, které na kalkulátoru používal učitel. Výzkum ukázal, že klíčovou roli při integraci CAS hraje učitel, jeho kompetence a vyučovací metody, což odpovídá i výsledkům, ke kterým dospěly studie zaměřené na grafické kalkulátory bez této technologie. Podobně jako v předchozích výzkumech i zde žáci pracující

---

<sup>8</sup>TI-Nspire je produktová řada firmy Texas Instruments, která obsahuje jak grafické kalkulátory (s technologií CAS i bez ní, včetně typů s barevnou či dotykovou obrazovkou), tak počítačový software. Uživatelské rozhraní kalkulátorů připomíná více počítač než kalkulátor, k dispozici je řada aplikací, včetně dynamické geometrie.

s CAS kalkulátory vykazovali větší rozmanitost strategií řešení než srovnávací skupina. Současně výzkumníci zjistili, že slabší žáci měli potíže s používáním těchto kalkulátorů při řešení úkolů. To nasvědčuje tomu, že bez základních matematických vědomostí nejsou žáci schopni tento nástroj používat adekvátním způsobem.

### 2.2.3 SHRNUTÍ VÝSLEDKŮ VÝZKUMŮ CAS TECHNOLOGIE

Jak již ale bylo uvedeno, výsledky dosud realizovaných kvantitativních analýz dlouhodobých výzkumů vlivu CAS technologií na výkon žáků v testech jsou různorodé. Kvalitativní analýza konkrétních situací, jak žáci pracují s CAS při řešení úloh, naznačila, že CAS nástroje automaticky nepodporují experimentální způsoby práce a efektivnost instrumentálních technik závisí na úrovni matematických znalostí (Guin et al., 2005). Některé průzkumy naznačily, že volbu metod práce může ovlivňovat především přístup učitele (Drijvers, 2003).

Shrneme-li výsledky sledovaných výzkumů, lze říci, že k hlavním přínosům integrace CAS technologií patří podpora:

- pozitivního postoje žáků k matematice, tím i jejich motivace a efektivnosti výuky,
- porozumění matematickým pojmům,
- přechodu mezi číselnou, grafickou či symbolickou reprezentací problému a chápání jejich souvislostí,
- experimentálních způsobů práce s matematickými objekty (pokud učitel k tomu vede žáky),
- individualizace výuky spojené s kooperací žáků v hodinách.

Porovnáme-li tyto závěry s přínosem grafických kalkulátorů bez CAS technologií, zjistíme, že jsou obdobné. Průběh i výsledky experimentů upozornily, že důležitou roli při integraci CAS hraje učitel a jeho metody. CAS kalkulátory jsou využívány zejména ke grafickému řešení úloh a k vizualizaci matematických objektů včetně experimentování s nimi. Dále jsou používány při řešení komplexních a reálných situací. Průběh i výsledky experimentů upozornily také na nezbytnost rozvíjení žákovských dovedností, a to zejména jejich kritického myšlení i zdůvodňování používaných postupů a získaných výsledků.

I když výzkumy v různých zemích ukazují, že žáci pracující s kalkulátory typu CAS dosahují v klasických početních dovednostech bez podpory techniky srovnatelných výsledků s ostatními žáky, integrace těchto typů do vyučování středoškolské matematiky postupuje velmi pomalu. Příčin tohoto jevu je celá řada, avšak k hlavním důvodům patří podle našeho názoru pojetí matematického vzdělávání na střední škole. Lze říci, že s rostoucím stupněm matematického vzdělávání se obecně zvyšuje důraz na teoretické zdůvodňování či odvozování výsledků, v centru pozornosti stojí logické myšlenkové postupy. Integrace kalkulátorů typu CAS však více podporuje experimentální postupy řešení problémů, což je do určité míry v rozporu s klasickým pojetím středoškolského matematického vzdělávání a ve svém důsledku vede ke ztížení integrace těchto kalkulátorů. K dalším příčinám patří skutečnost, že začlenění kalkulátorů typu CAS vyžaduje nové přístupy k výuce konkrétních témat, přičemž výzkumy v této oblasti jsou teprve na začátku. Zkušenosti z výuky a analýza konkrétních výukových situací ukazují, že integrace kalkulátorů typu CAS vyžaduje hluboké změny, které souvisejí

- s učitelovým pojetím vyučování matematiky a s rolí, kterou učitelé přisuzují kalkulátorům, resp. softwaru typu CAS,
- s metodickými problémy (způsob kladení i formulace konkrétních otázek, různorodost žakovských způsobů řešení za podpory CAS a z toho vyplývající nutnost důkladného plánování výukového procesu ze strany učitele),
- s organizací výukového procesu za podpory CAS (Guin et al., 2005).

Uvedené zkušenosti ukazují nezbytnost dalšího zkoumání konkrétních výukových situací s podporou CAS z hlediska učení se žáků, vytváření matematických pojmů a vztahů i z hlediska analýzy žakovských způsobů užití CAS při řešení úloh. Jiné studie upozornily na skutečnost, že žáci používající CAS lépe chápou zejména pojmy proměnné, parametru a funkce. To by mohlo znamenat, že používání CAS podporuje rozvoj porozumění těmto matematickým pojmům (Drijvers, 2003; Böhm et al., 2004).

Využívání CAS kalkulátorů, resp. matematických programů typu CAS, zřejmě nejvýrazněji ovlivňuje skutečnost, zda jsou tyto nástroje doporučeny v kurikulu a zda mohou být využívány v závěrečných testech. K takovým evropským zemím patří Rakousko, Francie a Dánsko. Důležitou roli z hlediska začlenění CAS kalkulátorů do výuky má pregraduální a postgraduální příprava učitelů matematiky, neboť používání technologií CAS klade značné technické i didaktické nároky na práci učitele. Z tohoto hlediska korespondují uvedené závěry s výsledky studií, které se zabývají využíváním grafických kalkulátorů.

CAS technologie přinášejí do výuky zejména usnadnění rutinních matematických postupů. V prostředí CAS ztrácí proto řada tradičních matematických úloh svůj význam. Zatímco při klasickém řešení úlohy „vyřeš rovnici“ či „vypočítej limitu“ žák používá jisté matematické algoritmy a pravidla, v prostředí CAS zvolí příslušný příkaz a stiskne tlačítko ENTER. V prvním případě žák prostřednictvím vlastního řešení rozvíjí své vědomosti, dovednosti a schémata uvažování, v druhém případě se jedná především o dovednost pracovat v prostředí CAS.

Je důležité najít ve výuce matematiky rovnováhu mezi používáním početních algoritmů a technologií. Pokud zůstane matematické kurikulum na středních školách stejné a nezohlední nové dovednosti a postupy za podpory CAS, pak učitelé nemohou v širším měřítku implementovat CAS. Konkrétní náměty pro integraci technologie tohoto typu lze nalézt v publikacích zaměřených na tuto problematiku (Böhm et al., 2004; Drijvers, 2003; Robová, 2012).

### 3 VÝZKUMY VLIVU DYNAMICKÉ GEOMETRIE NA VĚDOMOSTI ŽÁKŮ

V posledních letech se na školách začaly používat programy dynamické geometrie. Jedná se o počítačový software, který umožňuje rychlé a přesné rýsování geometrických útvarů podle zásad konstrukční geometrie, přičemž lze manipulovat s již narýsovanými objekty (Vaníček, 2009, s. 43). Při pohybu některé volné entity v rysu se z pohledu uživatele vytvořená konstrukce dynamicky překresluje, a tak zprostředkovává uživateli v reálně krátkém čase náhled řady geometrických situací. Tyto programy můžeme dělit podle toho, zda jsou určeny pro výuku geometrie v rovině (2D programy), či pro výuku stereometrie (3D programy).

### 3.1 VLIV NA PROCES UČENÍ ŽÁKŮ V PLANIMETRII

První výzkumné práce věnované vlivu dynamické geometrie na vyučování a učení matematice se začaly objevovat v devadesátých letech (Hansen, 2004; Laborde et al., 2006). Tyto studie se zaměřily na proces interakce žáka s počítačem, teprve později se předmětem zkoumání staly změny v procesu učení i ve výkonu žáků v testech. Z hlediska teoretického přístupu většina badatelů vycházela z konstruktivistického přístupu k vyučování, ve kterém technologie podporovala konstrukci geometrických poznatků. Ve výzkumech byly nejčastěji používány programy *Geometer's Sketchpad*, *Geometric Supposer* a *Cabri*, později i *GeoGebra*.

Jen omezený počet výzkumů se zaměřil na dopad dynamické geometrie na vědomosti a výkon žáků v matematice. Tyto výzkumy měly kvantitativní charakter a používaly metodu experimentální a kontrolní skupiny, výuka experimentální skupiny probíhala s podporou dynamické geometrie. Výzkumy většinou probíhaly v několika třídách v rozsahu dvou a více týdnů; z hlediska probíraného učiva se převážně jednalo o vlastnosti pravidelných i nepravidelných  $n$ -úhelníků, zobrazování geometrických útvarů v podobných a shodných zobrazeních apod. Výsledky experimentální výuky byly zjišťovány porovnáním pre-testů a post-testů, které psali žáci obou skupin.

Dlouhodobá studie, kterou po dobu třiceti šesti týdnů realizoval s žáky 10. a 11. ročníku střední školy Funkhouser (2003), ukázala, že experimentální skupina dosáhla v porovnání s kontrolní skupinou výrazně lepších výsledků ve standardizovaném testu na porozumění geometrickým pojmům. K obdobnému závěru dospěli ve svých disertačních pracích Hodanbosi (2001; cit. v Hansen, 2004) a Baharvand (2001; cit. v Hansen, 2004).

Další výzkum probíhající v roce 2002 se zaměřil na porovnání výkonu žáků 7. ročníků rozdělených do tří skupin (Isiksal, Askan, 2005). První pracovala ve výuce s dynamickým programem<sup>9</sup>, druhá používala tabulkový kalkulátor Excel a třetí skupina byla kontrolní. Žáci používající dynamický software dosáhli signifikantně lepších výsledků než ostatní. Výrazně lepší výsledky skupin pracujících s dynamickou geometrií potvrdil i jiný výzkum v 7. ročníku (Ubuz et al., 2009). Další studie se zaměřila na výkon žáků 6. ročníku v tématu mnohoúhelníky, jejich shodnost a podobnost (Erbas, Yenmez, 2011), přičemž žáci experimentální a kontrolní skupiny používali stejné pracovní materiály. Výsledky a rozbor testů ukázaly významné zlepšení žáků experimentální skupiny; tyto výsledky potvrdil i test zadaný s odstupem tří měsíců od experimentální výuky.

Jedním z největších kvantitativních výzkumů byl španělský experiment probíhající v letech 2001–2006, kterého se zúčastnilo 15 000 žáků a 400 učitelů (Arias, Maza, 2006). Uvedený výzkum byl zaměřen na zlepšení výsledků žáků ve výuce matematiky na středních školách za podpory ICT. Projekt kladl důraz na systematickou a promyšlenou integraci kalkulaček i matematických programů, včetně *Cabri*. Každý učitel zapojený do projektu pracoval s experimentální a kontrolní skupinou, přičemž experimentální skupina používala ve výuce jednou týdně technologie. Výsledky experimentální skupiny v tradičních písemných matematických testech byly oproti srovnávací skupině lepší o 11,2 %, výsledný průměrný počet bodů z matematiky v experimentální skupině se zlepšil o 24,39 %. Obdobně koncipovaný experiment, i když v mnohem menším rozsahu, probíhal ve školním roce 2005/2006 na jedné české střední škole; zúčastnily se ho 4 třídy a týkal se pouze využití *Cabri*. Výsledky

<sup>9</sup>Jednalo se o dynamický software *Autograph*, který umožňuje kreslit 2D i 3D geometrické objekty a zobrazovat je ve shodných a podobných zobrazeních. Viz <http://www.autograph-math.com>

žáků byly srovnávány pomocí vstupních a výstupních testů z geometrie, přičemž experimentální skupina dosáhla ve výstupním testu lepších výsledků i většího rozdílu mezi vstupními a výstupními hodnotami (Sedláček, Potůčková, 2007).

Kromě výše uvedených výzkumů existují také šetření, která nezjistila rozdíly ve prospěch žáků pracujících v hodinách matematiky s dynamickou geometrií. Gawlick (2002) rozdělil žáky 7. ročníků do tří skupin – první skupina pracovala ve výuce s dynamickou geometrií, druhá používala stejné materiály bez podpory softwaru, třetí skupina, kontrolní, žádné nové materiály nepoužívala. V post-testu dopadla nejhůře kontrolní skupina, ale ve výsledcích žáků prvních dvou skupin nebyly zjištěny výrazné rozdíly. Také Hull a Brovey (2004), kteří zkoumali vliv dynamické geometrie na úroveň osvojení vědomostí žáků 9. ročníků, nezjistili významné rozdíly mezi žáky experimentální a kontrolní skupiny. Dále analyzovali vliv softwaru na výkon žáků experimentální skupiny z hlediska jejich matematické úrovně a dospěli k závěru, že průměrní žáci se zlepšili v post-testu o více bodů, než žáci nadprůměrní.

Z uvedeného vyplývá, že existují výzkumy, které dokládají jak lepší výkon žáků pracujících s dynamickou geometrií, tak výzkumy, které nezjistily rozdíly ve výkonu ve prospěch těchto žáků. Současně je zajímavé, že převážná část výzkumů byla zaměřena na žáky nižších ročníků víceleté střední školy. Tento fakt může souviset s tím, že těžiště výuky geometrie na vyšší střední škole spočívá v analytické geometrii, přičemž dynamické programy jako *Cabri* jsou vhodné zejména pro výuku syntetické geometrie. Vzhledem k obtížně porovnatelným podmínkám experimentálních a kontrolních skupin z hlediska výukových materiálů, vyučovacích metod a formulace otázek v testech, je třeba brát prezentované výsledky kvantitativních výzkumů s jistou rezervou. Současně se mohly v pozorovaném pozitivním vlivu dynamické geometrie promítnout používané konstruktivistické metody vyučování. Dále je třeba vzít v úvahu i relativně krátkou dobu, po kterou byla většina experimentů realizována, neboť pozitivní výsledky z hlediska úrovně vědomostí a dovedností žáků nebyly většinou ověřovány s větším časovým odstupem<sup>10</sup>.

Také z dalších, většinou kvalitativních šetření vyplývá, že zařazení dynamických programů do výuky nevede u žáků ke zhoršení vědomostí a dovedností z geometrie (Johnston-Wilder, Mason, 2006; Oldknow, Taylor, 2003). Žáci po určité době ve výuce prokazují hlubší a trvalejší zapamatování získaných poznatků. Většina autorů se shoduje v názoru, že využívání programů dynamické geometrie rozvíjí geometrickou představivost žáků, a to zejména díky dynamickým atributům programů, vyššímu zájmu žáků o probírané téma a jejich aktivitě. Někteří uvádějí, že tyto programy také napomáhají rozvíjet prostorovou představivost, která je součástí geometrické představivosti (např. Leischner, 2003; Žilková, 2009). Představivost, a to nejen geometrická, se obecně rozvíjí praxí, přičemž programy dynamické geometrie v krátkém čase zprostředkují žákům náhled řady geometrických situací a rozšiřují tak jejich modely a zkušenosti. Rozšiřují tedy spektrum izolovaných modelů, takže žáci si mohou vytvořit generický model (Hejný, Kuřina, 2009). Za podpory programu si žáci vytvářejí představy, které jsou postupně integrovány do jejich dosavadního systému zkušeností. Důsledkem rozvíjení geometrické představivosti a tvořivosti žáků za podpory dynamické geometrie je rozvíjení žákovských kompetencí<sup>11</sup>, a to zejména

<sup>10</sup>Post-test s odstupem několika měsíců po skončení experimentu byl zadán pouze v několika z uvedených výzkumů (Gawlick, 2002; Ubuz et al., 2009; Erbas, Yenmez, 2011). Jejich výsledky jsou ale také rozdílné – výrazně lepší výsledky experimentální skupiny zaznamenal pouze jeden z nich.

<sup>11</sup>Jedná se zejména o kompetence k učení, k řešení problémů a kompetence komunikativní (RVP G, 2007).

těch, které souvisejí s rozvojem logického myšlení a úsudku, vytvářením hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, s abstrakcí a argumentací v matematice.

Část z výše uvedených studií se zabývala motivací žáků k učení a jejich postoji ke geometrii. Jako výzkumný nástroj byly použity dotazníky, pozorování v hodinách, případně analýza videonahrávek. Některé studie dospěly ke zjištění, že žáci jsou při integraci dynamické geometrie do výuky více motivováni ke studiu a kladně hodnotí i výuku (Baharvand, 2001; cit. v Hansen, 2004; Isiksal, Askan, 2005; Erbas, Yenmez, 2011), jiné výrazné rozdíly nenalezly (Funkhouser, 2003; Hull, Brovey, 2004). Výzkum, který se zaměřil na vliv řešení geometrických úloh inspirovaných reálnými situacemi, poukázal na zvýšení zájmu studentů – budoucích učitelů matematiky o geometrii, i na to, že si více uvědomovali význam geometrie (Abdelfatah, 2011).

Další kvalitativně orientované studie se zabývaly tím, jak může dynamická geometrie podpořit proces učení žáků. Často se jednalo o případové studie, kdy výzkumníci pozorovali několik žáků během experimentální výuky. Pozorování byla doplněna analýzou práce žáků a rozhovory se žáky. V souvislosti s integrací softwaru byl zjištěn pozitivní vliv dynamické vizualizace geometrických objektů na vytváření a osvojování pojmů, což také dokládají výsledky kvantitativních výzkumů zaměřené na výkon žáků, neboť žáci z experimentálních skupin nejlépe řešili úkoly na porozumění pojmům. Podle řady odborníků ovlivňuje dynamická geometrie pojmotvorný proces žáků v závislosti na konkrétní geometrické aktivitě a v souvislosti s řešením vhodných typů úloh, ke kterým patří konstrukční a důkazové úlohy (Laborde et al., 2006). S podporou osvojování pojmů souvisí rozšíření slovní zásoby v geometrii (Aydin, Monaghan, 2011). Současně bylo zjištěno, že používání tohoto softwaru rozvíjí u žáků jazyk ovlivněný prostředím softwaru, a že žáci tímto jazykem komunikují mezi sebou i s učitelem (Gillis, 2005).

Pitta-Pantazi a Christou (2009) se zabývali otázkou, zda dynamická geometrie ovlivní výsledky žáků v závislosti na jejich učebních stylech. Zkoumali skupinu žáků 6. ročníků, kteří byli testováni standardizovaným testem kognitivních stylů před zahájením a po skončení experimentální výuky. Vycházeli z předpokladu, že kognitivní styl ovlivňuje způsob, jakým je konkrétní informace zpracována a osvojena. Zjistili, že prostředí dynamické geometrie podporuje proces učení nezávisle na kognitivním stylu žáka, avšak nejlépe dopadly výsledky testů žáků preferujících verbální styl učení. Další výzkumy poukázaly například na to, že žáci lépe porozumí geometrickému problému prostřednictvím jeho vizualizace na úrovni prostorově-grafické, a na základě manipulací s objekty mohou dospět k teoretickému zdůvodnění řešení. Jestliže si žák nevytvořil vztahy mezi počítačově-grafickým a teoreticko-geometrickým světem, nemůže porozumět problému závislosti vztahů v prostředí dynamické geometrie, neboť se pro žáka jedná o dva separované světy (Laborde et al., 2006).

Další skupina studií se zaměřila na objevování hypotéz a jejich prověřování. Formulování hypotéz i jejich prověřování je v prostředí dynamické geometrie svázáno s nástrojem tažení (*dragging*) geometrického objektu po nákresně.<sup>12</sup> Gawlick (2002) zjistil, že i když experimentální skupina pracující s dynamickou geometrií nedosáhla v post-testu lepších výsledků z hlediska vědomostí a dovedností, byla výrazně lepší v úkolech, ve kterých měli žáci objevit vztahy mezi geometrickými objekty. Dospěl tak k závěru, že dynamická geometrie podporuje vytváření hypotéz, ne však jejich prověřování. Gillis (2005) ve své experimentální studii zkoumal vliv nástroje tažení objektu na tvorbu hypotéz. Jedna skupina žáků pracovala v prostředí dynamické ge-

---

<sup>12</sup>Vaníček (2009) používá pro tuto činnost termín *manipulace s figurou*.

ometrie, druhá skupina používala totéž prostředí, avšak neměla k dispozici nástroj tažení objektu, tj. řešila úkoly ve statickém prostředí. Gillis pracoval se žáky, kteří v celostátních testech výkonu dosáhli slabších výsledků. Zjistil, že tito žáci vytvářeli v dynamickém prostředí více relevantních hypotéz než žáci ve statickém prostředí a že jejich matematická úroveň nebyla významným predikátorem pro tvorbu chybných hypotéz. Během experimentální výuky pozoroval, že v prostředí dynamické geometrie někteří žáci nerozlišují mezi hypotézou a jejím důkazem, resp. mezi induktivním a deduktivním postupem. Žáci nepociťovali potřebu dokazovat objevené hypotézy, neboť byli díky softwaru přesvědčeni o jejich platnosti, tj. vnímali použití softwaru jako náhradu deduktivního důkazu. Otázkou je, zda „autorita“ počítače nevede některé žáky k odporu k dokazování, či zda vhodně prezentované problémy naopak podporují u žáků potřebu zdůvodnění, jak také dokládají některé výzkumy (Laborde et al., 2006; Abdelfatah, 2011).

Dynamická geometrie usnadňuje žákům nejen objevení hypotézy, ale také její prověřování. Z tohoto pohledu slouží software jako nástroj bezprostřední zpětné vazby, přičemž zpětná vazba podporuje zpřesnění žákovských odpovědí (Laborde et al., 2006). Lze však říci, že v některých výzkumech byl pozorován pozitivní vliv na postoje k dokazování objevených jevů, v jiných naopak. Na základě prostudovaných výzkumů a vlastních zkušeností z výuky se domníváme, že postoje žáků k ověřování hypotéz souvisejí jednak s jejich matematickou úrovní, jednak s metodickými postupy učitele. Autorky dalšího výzkumu, Baccaglioni-Frank a Mariotti (2010), se zaměřily na kognitivní procesy žáků při řešení otevřených problémů<sup>13</sup> ve formě konstrukčních úloh. Na základě pozorování práce žáků a rozhovorů s nimi dospěly ke zjištění, že dynamická geometrie podporuje induktivní způsoby uvažování a rozvíjí u žáků specifickou formu argumentování, která je spjata s nástroji dostupnými v prostředí dynamické geometrie (*instrumented argument*).

Prospěšný vliv programů dynamické geometrie na školskou geometrii dokládají další výzkumy, které uvádí Laborde et al. (2006) i Vaníček (2009). Shrňeme-li vliv integrace dynamické geometrie na proces učení i výsledky žáků, jedná se zejména o dva hlavní přínosy:

- pozitivní vliv na výkon žáků i proces učení zejména z hlediska porozumění geometrickým pojmům,
- podpora experimentální činnosti žáků, objevování hypotéz i usnadnění jejich ověřování.

### 3.2 VLIV NA PROCES UČENÍ ŽÁKŮ VE STEREOMETRII

Výše uvedené výzkumy a jejich výsledky se vztahují k rovinné dynamické geometrii. Získané závěry nelze jednoduše zobecnit na 3D prostředí, neboť zde hraje roli také prostorová představivost žáků. Z hlediska nástroje tažení objektu (*dragging*) je objekt ve 3D prostředí ovládán nejen myší, ale navíc další klávesou (např. v *Cabri 3D*). Je proto pochopitelné, že dosavadní výzkumy zaměřené na 3D dynamickou geometrii se zabývaly rozvojem prostorové představivosti v tomto prostředí i způsoby používání nástroje tažení.

---

<sup>13</sup>Otevřený problém v jejich práci je chápán jako úkol, jehož formulace neumožní žákovi předem odhadnout postup řešení či odpověď. Proces řešení otevřených problémů má dvě fáze – objev hypotézy a její ověření.

Chino et al. (2007) zkoumali během šestnácti týdnů poznávací procesy žáků nižší střední školy při konstrukci prostorových objektů a při určování jejich objemů a povrchů. Výsledky testů experimentální skupiny byly srovnávány s výsledky kontrolní skupiny i s výsledky národních testů. Byl pozorován výrazný kladný vliv experimentální výuky na zdůvodnění konstrukce těles z rovinných obrazců (např. vytvoření válce pomocí kruhu), črtání náčrtků prostorových útvarů i na rozvoj prostorové představivosti. Autoři výzkumu se domnívají, že možnost zkoumání dynamického rysu z různých úhlů pohledu přispěla k prohloubení poznávacích procesů žáků.

K podobným pozitivním závěrům z hlediska rozvoje prostorové představivosti dospěli rovněž Güven a Kosa (2008), kteří zkoumali vliv používání *Cabri 3D* na prostorovou představivost budoucích učitelů matematiky. Před zahájením experimentální výuky absolvovali studenti vstupní test. Po osmi týdnech používání softwaru podstoupili závěrečný test. Porovnání výsledků obou testů ukázalo významné zlepšení prostorové představivosti studentů. Hattermann (2009) studoval, jaké nástroje používají budoucí učitelé matematiky v dynamickém prostředí při konstruování těles a jejich řezů, a soustředil se na nástroj tažení objektu (*dragging*). Studenti měli před zahájením experimentu již základní zkušenosti s prostorovým dynamickým softwarem (*Cabri 3D*, *Archimedes Geo3D*). Hattermann zjistil, že někteří studenti používali ke konstrukci prostorové nástroje (např. kulovou plochu pro sestavení stejně vzdálených bodů), jiní jen „rovinné“ (např. kružnici a úsečku dané délky). Jen velmi málo z nich používalo nástroj tažení a ověřovalo jím správnost konstrukce. Ještě zajímavější bylo zjištění, že při odhadování tvaru řezu krychle (trojúhelník, čtyřúhelník, ...) někteří studenti dávali přednost použití reálného modelu krychle před počítačovým. Uvedené výsledky naznačily, že ovládnutí nástrojů 3D softwaru je pro studenty obtížnější, než je tomu v případě 2D programů, a že je potřeba věnovat dostatek času seznámení s 3D prostředím a jeho nástroji.

Stejně jako tomu je v případě jiných technologií, i začlenění rovinné a prostorové dynamické geometrie do výuky v sobě skrývá jistá úskalí. Jedná se zejména o obtíže žáků-začátečnicků v dynamickém prostředí, které souvisejí s *neporozuměním filozofii práce v dynamickém prostředí*, například s nepochopením vázanosti geometrických objektů. Jedním z důsledků je, že žáci se uchylují ke konstrukcím „od oka“. Žáci modifikují objekty na nákrese tak, aby vypadaly „správně“, místo soustředění se na správný geometrický postup (Gillis, 2005; Vaníček, 2009). Typickým příkladem je konstrukce kružnice opsané trojúhelníku, kdy žák sestrojí kružnici a tažením některých vrcholů trojúhelníku po nákrese upraví situaci tak, aby kružnice procházela všemi vrcholy, místo použití průsečíku os stran. Vaníček (2009) rozlišuje z hlediska příčin tři hlavní skupiny chyb, kterých se žáci v tomto prostředí dopouštějí. Do první skupiny patří matematické chyby, do druhé chyby v práci s médiem a do třetí skupiny patří chyby vzniklé při nasazení počítače do výuky, tj. nedostatek dynamické představivosti a neporozumění filozofii práce v oblasti dynamické geometrie. Jak bylo již dříve zmíněno v tomto oddíle, k problémům patří rovněž *nerozlišování mezi hypotézou a důkazem*, resp. žáci nepociťují potřebu objevené vztahy prověřovat, neboť je implicitně považují za pravdivé. Gawlick (2002) poukázal také na skutečnost, že slabší žáci používají software ke hraní místo řešení daného problému. Další úskalí, uvedená v následujícím odstavci, souvisejí s přístupem učitelů k začlenění dynamické geometrie do hodin matematiky.

K hlavním problémům integrace dynamické geometrie patří skutečnost, že učitelé používají tento software v intenci „statického“ geometrického kurikula, tj. v rámci tradičního učiva i metod (Laborde et al., 2006; Kasten, Sinclair, 2009), a tím vlastně



nevyužívají výukové možnosti technologie. I když odborníci zdůrazňují přínos dynamické geometrie z hlediska objevování a osvojování nových poznatků, učitelé software spíše používají k jejich ověřování (Gawlick, 2002). Studie reálného používání dynamické geometrie na anglických školách upozornila, že učitelé málo využívají nástroj tažení objektu po nákresně (*dragging*) k analýze dynamických změn, resp. potlačují jeho použití, aby mohli přímo řídit žákovou činnost a vyhnuli se tak nečekaným výukovým situacím (Ruthven et al., 2005; cit. v Laborde et al., 2006). Případové studie vyučovacích hodin různých učitelů poukázaly na to, že učitelé upřednostňují různé funkce softwaru; například někteří kladou důraz na použití nástroje *Stopa*, jiní používají zejména metrické příkazy (Ruthven et al., 2008). K dalším úskalím patří také to, že jsou používány ve výuce buď stejné typy úloh jako při tradiční výuce, nebo naopak učitelé pro své žáky vytvářejí příliš náročné úlohy, neboť se domnívají, že technologie výrazně usnadní žákům jejich řešení (Laborde, 2001).

## 4 VÝZKUMY VLIVU VYUŽITÍ WEBOVÝCH MATERIÁLŮ NA VÝUKU MATEMATIKY

V prostředí internetu lze dnes nalézt řadu volně dostupných materiálů, které mohou být využity v různých tématech školské matematiky a také v různých výukových situacích – ať již při výkladu a procvičení nové látky, při upevnění učiva, při testování žáků či při přípravě učitele i žáků na hodinu. Tyto materiály se odlišují nejen formou a obsahem, ale zejména úrovní zpracování.

Zatímco první webové materiály byly převážně statického charakteru, dnešní kvalitní zdroje obsahují dynamické prvky, ke kterým kromě hypertextových odkazů patří aplety, různé animace, výpočetní nástroje, videa apod. Součástí webových stránek se také stávají aplikace typu CAS či dynamické geometrie, které přispívají k vizualizaci matematických pojmů i vztahů a objevování souvislostí.

K hlavním přínosům kvalitních internetových zdrojů z hlediska výuky patří zejména přístup k velkému množství materiálů, které podporují názornost i zvyšování efektivity výuky, zvyšují motivaci žáků a do jisté míry umožňují i individualizaci výuky či přípravy na vyučování. Vzhledem k tomu, že většina škol i řada domácností má k dispozici připojení k internetu, patří k výhodám také snadná dostupnost těchto zdrojů a s tím spojené nízké finanční náklady.

Různorodost webových materiálů i relativně krátká doba, po kterou jsou v širším měřítku ve výuce používány, patří podle našeho názoru k příčinám, proč jsou výzkumy integrace těchto zdrojů do jisté míry nesourodé a proč lze jejich výsledky jen obtížně generalizovat. V další části se proto soustředíme zejména na vliv webových materiálů z hlediska osvojení vědomostí a dovedností, z hlediska online hodnocení žáků i vyhledávání pomoci při učení.

### 4.1 VÝZKUMY ZAMĚŘENÉ NA VĚDOMOSTI A DOVEDNOSTI ŽÁKŮ

V současné době je k dispozici jen málo výzkumů věnovaných vlivu využití webových materiálů na matematické vědomosti a dovednosti žáků středních škol. Převážná část výzkumných prací je zaměřena na studenty vysokých škol jiných oborů než matematiky. To je dáno jednak relativně krátkou dobou, po kterou je internet ve vzdělávání matematice využíván, jednak tím, že online výuka nemá na základních a středních školách tradici. Matematika je obor náročný na pochopení, a proto při rozvíjení vyšších myšlenkových operací žáků této věkové kategorie, jako je abstrakce, analýza či

syntéza, hraje výklad i pomoc učitele důležitou roli. K dalším důvodům patří také to, že jazyk HTML není přímo vhodný pro psaní složitějších matematických výrazů, a proto je vytváření matematických materiálů náročnější<sup>14</sup> (např. Mošna, 2005).

Ve výzkumech, které se zaměřily na vliv webových materiálů na úroveň osvojení vědomostí a dovedností, byly standardně používány kvantitativní metody založené na porovnávání výkonu studentů či žáků v testech. Řada těchto studií zkoumala také postoje žáků a studentů k takto probíhající výuce, přičemž v této části šetření byly využívány dotazníky nebo také rozhovory se zúčastněnými osobami. Vzhledem k tomu, že internet byl nejdříve využíván k distančnímu vzdělávání na vysokých školách, zabývaly se výzkumy na konci devadesátých let porovnáním výsledků studentů, jejichž distanční výuka probíhala s podporou internetu, s výsledky studentů, kteří absolvovali tradiční způsob výuky. K prvním takovým výzkumům patří studie Wegner et al. (1999). Tato dvousemestrální studie srovnávala postoje k výuce a výkon studentů-učitelů z praxe v klasickém prezenčním a online distančním vzdělávání; jednalo se o postgraduální vzdělávání v oblasti tvorby osnov. Studenti experimentální skupiny používali mail, videokonference a dostávali k řešení sady problémů. Závěrečný test neprokázal významné rozdíly mezi skupinami. Studenti, kteří absolvovali kurz s podporou internetu, hodnotili výuku pozitivně, avšak stěžovali si na nedostatek kontaktu s vyučujícími a problémy technického rázu. Některé další výzkumy zaměřené na fyziku, finanční matematiku či právo, zjistily rozdíly ve výsledcích testů ve prospěch studentů, kteří absolvovali výuku s podporou online materiálů (Hill et al., 2004).

K novějším výzkumům zaměřeným na výuku matematiky s podporou internetu patří celoroční výzkum na několika německých nižších středních školách (Graff et al., 2008). Žáci 5. a 6. ročníků ve věku 12–15 let byli rozděleni do dvou skupin – experimentální a kontrolní. Na začátku školního roku absolvovali žáci obou skupin standardizovaný pre-test, který byl zaměřen na zjištění úrovně dovedností v oblasti základních aritmetických operací. Pre-test byl integrován do webového prostředí e-Fit, se kterým dále během roku pracovali pouze žáci experimentální skupiny. Experimentální skupina pracovala v prostředí e-Fit, v němž žáci řešili různé početní úkoly se stupňovanou obtížností, v rozsahu dvě vyučovací hodiny týdně. V ostatních hodinách pracovali tito žáci klasickým způsobem a se stejnými materiály jako žáci kontrolní skupiny. Po vyhodnocení online úkolů byl každý žák stručně informován o výsledku a na základě výsledků mu byla připravena individuální sada úloh. Na konci školního roku absolvovali žáci obou skupin v prostředí e-Fit závěrečný test, ve kterém dosáhli žáci experimentální skupiny výrazně lepších výsledků. Otázkou však zůstává, zda jejich výrazně lepší výkon nebyl ovlivněn diferencovanou formou „douchování“, která vycházela ze zjištěných konkrétních nedostatků v dovednostech žáka. Dalším zdrojem výrazně lepších výsledků může být také skutečnost, že post-test byl opět realizován v prostředí e-Fit, tedy v prostředí, ve kterém žáci experimentální skupiny pracovali během školního roku. Vyučující experimentální skupiny pozorovali u žáků zvýšený zájem o hodiny, ve kterých pracovali na internetu.

Baki a Güveli (2008) se zabývali využitím webových materiálů při výkladu pojmu funkce u žáků středních škol a jak se tím ovlivní jejich postoje k výuce i výsledky v testech. Na začátku výzkumu byli žáci na každé ze zúčastněných škol rozděleni do dvou skupin, které většinou vyučoval stejný učitel. Pre-test nezjistil rozdíly mezi skupinami z hlediska vstupních vědomostí. Experimentální skupina pracovala s webo-

---

<sup>14</sup>Na řadě webových stránek je tento problém řešen formou obrázků. Matematický výraz je nejdříve vytvořen ve vhodném editoru (např.  $\text{\TeX}$ ) a ze zápisu výrazu je vytvořen obrázek, který je umístěn na webové stránky.

vými materiály, které byly vytvořeny právě pro tento experiment a sloužily žákům jako doplňkové materiály k učebnicím, tedy nejednalo se o e-learningový kurz. Materiály obsahovaly výklad, příklady s krokováním postupu a interaktivní cvičení se zpětnou vazbou. Žáci s nimi pracovali po dobu pěti týdnů dvě hodiny týdně ve výuce a mohli je používat i při své domácí přípravě. Již v průběhu experimentu zaznamenali vyučující růst motivace a sebedůvěry žáků z hlediska učení a plnění úkolů (*self-efficacy*). Experimentální skupina dosáhla v post-testu vědomostí a dovedností výrazně lepších výsledků, zlepšilo se zejména porozumění různým reprezentacím funkce (graf, předpis, tabulka). Postoje žáků a učitelů byly vyšetřovány prostřednictvím pozorování v hodinách a pomocí dotazníků. Učitelé kladně hodnotili interaktivní prvky na webových stránkách a uváděli, že vizualizace pojmů a animace hrají důležitou roli při učení žáků.

Další výzkum byl realizován v úvodním vysokoškolském kurzu matematiky pro biology (diferenciální rovnice, statistika) během jednoho akademického roku (Macedo-Rouet et al., 2009). Tři skupiny studentů mohly v týdenních testech používat na cvičeních materiály k přednáškám a cvičením. První skupina používala pouze tištěné materiály, druhá pracovala s materiály v online prostředí, třetí skupina také s online materiály, které ale byly lépe strukturovány (zjednodušení navigace, přímý přístup do dílčích kapitol z hlavního menu, propojení teoretických částí s testovými úkoly pomocí hypertextových odkazů aj.). Do výzkumu byla zařazena ještě kontrolní skupina, která nepoužívala při testech žádné externí zdroje. Jak se dalo očekávat, nejhorších výsledků dosáhla kontrolní skupina. Avšak první skupina, pracující s tištěnými materiály, dosáhla lepších výsledků než skupiny, které používaly online materiály. Autoři výzkumu zdůvodňovali tyto horší výsledky také tím, že studenti pracující s online materiály si stěžovali na únavu při jejich čtení.

Shrneme-li uvedená zjištění, je zřejmé, že výsledky výzkumů z hlediska vlivu webových materiálů na vědomosti a dovednosti žáků či studentů nejsou jednoznačné. Metaanalýza studií, které byly publikovány do roku 2002 a které se zabývaly jevy souvisejícími s integrací internetu do výuky, dospěla k závěru, že většina studií nezjistila významné rozdíly ve výkonu experimentálních a srovnávacích skupin (Hill et al., 2004). Studenti, žáci a učitelé zapojení ve výuce podporované webovými materiály zaujímali k této výuce pozitivní postoje. K nedostatkům experimentální výuky podle nich patřil menší kontakt s učitelem a náročnost čtení materiálů na obrazovce počítače.

## 4.2 VÝZKUMY VLIVU POSKYTOVÁNÍ ZPĚTNÉ VAZBY A VYHLEDÁVÁNÍ ONLINE POMOCI PŘI UČENÍ

Další okruh výzkumů se zaměřil na vliv online hodnocení na učení žáků. Tyto výzkumy se zabývaly především působením formativního hodnocení<sup>15</sup> (*formative assessment*) na proces učení studentů a jeho výsledky v prostředí e-learningových kurzů. K výhodám online formativního hodnocení patří zejména to, že student může získat hodnocení kdykoliv, a to i opakovaně. Současně mu online prostředí poskytuje bezprostřední zpětnou vazbu, která může přispívat k nápravě nedostatků v jeho učení.

---

<sup>15</sup>Hodnocení žákova učení může mít dvě podoby: sumativní a formativní. Sumativní hodnocení je souhrnné, závěrečné, končí závaznou známkou. Formativní hodnocení je dílčí, nemusí mít podobu známky, poskytuje žákovi detailnější zpětnou vazbu. Podle Blooma je cílem formativního hodnocení zjistit, co se žáci naučili správně, a co nikoli (Čáp, Mareš, 2001).

Také další kvantitativní výzkum se zabýval odstupňovanou bezprostřední zpět-nou vazbou a jejím vlivem na výsledky učení žáků v matematice (Wang, 2011). Žáci 7. ročníků nižších středních škol rozdělil po napsání pre-testu do tří skupin. Všechny skupiny používaly stejné tištěné výukové materiály, lišily se ale ve způsobu, jakým byly hodnoceny jejich vědomosti a dovednosti. První skupina se po ukončení daného tématu vyučovaného tradičním způsobem přesouvala k počítačům, kde žáci na webových stránkách odpovídali na hlavní, a dále i na vedlejší otázky, přičemž každá odpověď byla ihned vyhodnocena. Po špatné odpovědi na hlavní otázku žák obdržel náповědu, ne však správné řešení. Na základě výsledků pak každý žák absolvoval sadu úloh na počítači, ve kterých si procvičoval to, co neuměl. Druhá skupina absolvovala webové hodnocení pojaté tak, že výsledky se žáci nedovíдали po každé otázce, ale až na konci celého testu. Na základě výsledků testu jim byly připraveny počítačové sady úloh k procvičení. Třetí skupina psala písemné testy a následně jim byly stručně sděleny výsledky, ale žádná další aktivita již nenavazovala. Celkově nejlepších výsledků v post-testu dosáhli žáci, kteří byli bezprostředně hodnoceni po každém úkolu. Mezi zbývajícími dvěma skupinami nebyly zjištěny výrazné rozdíly. Ze zveřejněných závěrů není zcela zřejmé, proč bylo použito prostředí internetu, neboť obdobný test s formativním hodnocením mohl být vytvořen jako počítačový program. Nebyl zde využit totiž jeden z praktických přínosů online formativního hodnocení, kterým je asynchronnost tohoto hodnocení z hlediska místa a času, tj. žák nemusí být v konkrétním čase na konkrétním místě.

Další studie analyzovala spontánní chování žáků 6. až 9. ročníků nižších středních škol, kteří hledali na internetu pomoc v matematice (Puustinen et al., 2009). Autoři studie vycházeli z předpokladu, že analýza spontánního projevu žáků může lépe odrážet jejich skutečné potřeby, než náповěda vyžádaná volbou konkrétního tlačítka na webové stránce. Cílem studie bylo zjistit, zda existují různé formy hledání pomoci při učení a zda tyto formy souvisejí s věkem žáků. K výzkumu byl použit archiv matematického francouzského fóra, které zdarma poskytuje žákům pomoc s řešením problémů v matematice. Na dotazy žáků zde odpovídají dobrovolníci-učitelé středních škol, kteří žákům pomáhají, avšak neřeší za ně úkoly. Na základě analýzy byly popsány jednotlivé formy hledání – tři hlavní kategorie (žák poslal přímo zadání úkolu; žák konkrétně formuloval, v čem má problém; žák uvedl náznak řešení úkolu) a pět vedlejších (žák uvedl oslovení či pozdrav; rozloučení; osobní identifikaci; informaci o kontextu úkolu; poděkování). Výsledky ukázaly, že žáci používají různé formy vyhledání pomoci, přičemž s rostoucím věkem žáků roste počet forem (kategorií) obsažených v jedné zprávě. Ukázalo se, že pouze starší žáci ve věku 15 let byli schopni vytvářet srozumitelné zprávy, které byly společensky přijatelné, tj. zdvořilé. Mladší žáci nedokázali jasně formulovat svůj problém, což mohlo následně ovlivnit úroveň pomoci ze strany učitele. To může také souviset s nižší schopností mladších žáků jasně formulovat myšlenky i s asynchronností komunikace v prostředí internetu. Ukazuje se, že jedním z problémů komunikace na internetu je její rychlost. Rychlá výměna informací v tomto prostředí může u některých uživatelů vzbuzovat dojem „reálné“ komunikace (Hill et al., 2004).

Sande (2011) se ve své studii také zabývala chováním žáků v online prostředí matematického fóra. Cílem bylo charakterizovat matematické aktivity žáků při formulování dotazů i při jejich reakcích na nabízenou pomoc. Postupně analyzovala sto dotazů a odpovědí na téma limita funkce a sto dotazů a odpovědí na aplikace derivace (*related rates*). Na základě analýzy charakterizovala čtyři hlavní skupiny žáků, a to podle toho, zda žák v dotazu a také v odpovědi projevils matematickou aktivitu (tj. zda uvedl své řešení, nebo aspoň nápad, jak problém řešit). Zjistila, že

přibližně polovina žáků patřila do skupiny, která se aktivně dotazovala, tj. žák uvedl své řešení či nápad, avšak na odpověď již „matematicky nereagoval“. To mohlo být způsobeno tím, že odpověď pro něho byla dostačující. Druhou nejpočetnější skupinu tvořili „laxní“ žáci, kteří neprojeví žádnou matematickou aktivitu ani v dotazu, ani v odpovědi. Většinou se jednalo o žáky dožadující se naléhavě pomoci, neboť problému vůbec nerozuměli. Vzhledem k tomu, že pomoc poskytovaná na tomto fóru nemá jednotnou formu (od úplného řešení přes nápovědu až po kladení otázek), vyzpozovala, že v případě pomoci formou kladení otázek byl žák v následující odpovědi často aktivní, tj. snažil se sám najít řešení. To vyvolává otázky o vztahu mezi žakovou aktivitou a typem poskytnuté pomoci, dále vede k hledání faktorů, které ovlivňují povahu žakovy aktivity.

## 5 SOUČASNÉ TRENDY INTEGRACE TECHNOLOGIÍ

K novým technologickým trendům, které se postupně prosazují do výuky, patří propojování různých prostředků ICT v komplexně pojatých učebnách. Konkrétně se jedná o vybavení tříd počítačem s dataprojektorem, vizualizérem a interaktivní tabulí s hlasovacím zařízením. Dalším vývojovým směrem je zřizování notebookových učeben s připojením na Wi-fi<sup>16</sup>, v rámci e-learningu se používají videokonference, jejichž cílem je především zajištění kontaktu mezi žákem a učitelem.

Rozšířením myšlenky notebookových učeben, kde žáci pracují s počítačem ve škole, je vytváření tzv. digitálních tříd. V digitální třídě má každý žák k dispozici osobní notebook vybavený interaktivními učebnicemi pro práci ve škole i doma, třídy jsou vybaveny interaktivní tabulí i připojením k internetu. Problematikou využití notebooků se u nás zabývalo výzkumné šetření projektu *1:1 eLearning*, které proběhlo na jaře roku 2009 a do kterého se zapojila jedna třída 3. ročníku základní školy. Cílem projektu bylo stanovit návrhy a metodická doporučení pro integraci ICT do vzdělávacího procesu. Z výzkumného šetření vyplynulo, že vytvoření učebního prostředí za podpory malých přenosných počítačů pro všechny žáky je velmi komplikovaný proces. Žáci byli integrací notebooků do výuky motivováni k dalšímu učení, avšak docházelo ke zhoršení kooperace mezi žáky i zvýšení izolovanosti žáků. Šetření dále ukázalo, že učitelé zpravidla používali notebooky jako náhradu běžných didaktických prostředků v rámci tradičního pojetí výuky. Hlavní překážkou hlubší integrace notebooků byl nedostatek vzdělávacích zdrojů a programů využitelných ve výuce (Neumajer, 2009).

Ve školním roce 2009/2010 byl u nás zahájen čtyřletý projekt *Vzdělání21*,<sup>17</sup> který se zabývá zapojením notebooků a dalších technologií do výuky na základních školách formou digitálních tříd. K základním cílům projektu patří vytvoření a ověření systému začlenění ICT do výuky konkrétních předmětů (matematika, fyzika, český a anglický jazyk), včetně zkoumání reálného přínosu technologií pro žáky a učitele.<sup>18</sup> Zkušenosti z prvních tří let trvání projektu ukázaly, že žáci v těchto třídách jsou aktivnější i motivovanější a že nejdůležitějším faktorem úspěšnosti žáků digitálních tříd je opět učitel. Výsledky i analýza matematických testů, které psali v uvedeném období žáci digitálních i kontrolních tříd, neodhalily přesvědčivý pozitivní vliv technologií. Bylo zjištěno, že rozdíly ve znalostech experimentální a kontrolní skupiny

<sup>16</sup>Wi-fi zajišťuje bezdrátové propojení přenosných zařízení včetně jejich připojení k internetu.

<sup>17</sup>Viz <http://www.vzdelani21.cz>. Projekt byl zahájen v 6. ročnících na třech základních školách a postupně bude pokračovat s žáky až do jejich 9. ročníku. Odborným garantem projektu je Pedagogická fakulta UK v Praze.

<sup>18</sup>Žáci kromě notebooků používají při hodinách a v domácí přípravě i sešity a klasické učebnice.

nejsou průkazné. Výzkumníci se rovněž zaměřili na žáky z obou skupin, kteří se zúčastnili všech matematických testů v průběhu tří let projektu. Zjistili, že i když v prvním a druhém roce žáci digitálních tříd dosáhli v testech z matematiky lepších výsledků, ve třetím roce v posledním testu byly výsledky obou skupin vybraných žáků srovnatelné. Studie (Vondrová, Jančařík, 2012) přináší první výsledky v podobě popisu didaktických praktik učitelů při práci s notebooky. Opět se potvrdilo, že integrace ICT nemění automaticky styl výuky, neboť při používání notebooků se v polovině sledovaných případů jednalo o úkoly, které mohly být realizovány bez podpory této technologie. Převážně byly řešeny úkoly, ve kterých se opakovala a procvičovala již probraná látka, technologie tedy nebyla využita při objevování nových poznatků. Žáci s notebooky pracovali individuálně, hlavní komunikace probíhala mezi učitelem a žákem, nikoliv mezi žáky.

Shrneme-li uvedené poznatky, můžeme říci, že lze pozorovat trend rostoucího používání mobilních prostředků ICT ve výuce. Kromě notebooků se jedná o tablety typu iPad<sup>19</sup>, které mají připojení k internetu a jsou vybavené různými interaktivními programy, elektronickými učebnicemi a dalšími aplikacemi.

Širšímu využívání ICT ve výuce nahrává rostoucí podíl otevřených dokumentů a programů (*open source software*). Hlavní výhodou těchto programů je skutečnost, že jsou distribuovány i se zdrojovým kódem, což umožňuje jejich inovaci samotnými uživateli. Otevřené materiály a programy jsou šířeny převážně bezplatně, takže odpadají finanční náklady na pořízení a aktualizaci. K programům tohoto typu patří *Open Office.org* (obdoba *MS Office*) a geometrické programy *C.a.R.* a *GeoGebra*.

V souvislosti s rostoucím využíváním technologií ve výuce se rozšířil pojem počítačové kognitivní technologie, neboť technologie se dnes podílejí na procesu poznávání žáků i tento proces zkvalitňují (Vaníček, 2009, s. 11). Vzhledem k stále širšímu využívání technologií je třeba zkoumat jejich vliv jak na poznávací procesy žáků, tak i na obsah, cíle a metody školské matematiky. Podíváme-li se do nedávné historie konce sedmdesátých let, zjistíme, že výpočetní technika měla rychle změnit cíle, obsah i metody školské matematiky. Jak již bylo uvedeno, z hlediska cílů se očekával větší důraz na rozvoj algoritmického myšlení a na některé početní dovednosti (odhady, zaokrouhlování, reálná interpretace získaných výsledků), v učivu se předpokládalo zrušení či omezení některých partií (práce s logaritmickým pravítkem, práce s matematickými tabulkami, nácvik početních operací s vícecifernými čísly). Výpočetní technika měla přinést nové přístupy do výuky některých témat, konkrétně důraz na induktivní postupy a řešení problémů metodou experimentování. Tyto představy nebyly zcela naplněny, a to především pokud jde o vyučovací metody školské matematiky. Hlavní příčina spočívala v obtížné dostupnosti tehdejších výpočetních prostředků a v jejich programovém vybavení, které neumožňovalo takové způsoby jejich využití, jako je tomu dnes; jistou roli sehrála také setrvačnost didaktického myšlení učitelů. Z tohoto pohledu je třeba přistupovat k některým prognózám rychlých a rozsáhlých změn ve výuce matematiky i v procesu učení žáků spíše obezřetně.

---

<sup>19</sup>Zjednodušeně lze říci, že se jedná o notebook bez klávesnice, kde celou plochu zaujímá dotyková obrazovka a který je určen pro práci s různými multimediálními formáty, jako jsou videa, hudební nahrávky, textové dokumenty, učebnice, hry aj.

## 6 ZÁVĚR

Technologie v současné době ovlivňují především vyučovací metody školské matematiky a jejich prostřednictvím poznávací procesy žáků. Z pohledu dosažení cílů matematického vzdělávání jsou důležité metody, které rozvíjejí vědomosti a dovednosti žáků prostřednictvím jejich aktivní činnosti, neboť napomáhají rozvíjení samostatného myšlení žáků a trvalejšímu zapamatování vědomostí. Tyto metody, často označované jako konstruktivistické, ve starší literatuře heuristické, jsou při klasických formách výuky většinou časově náročné. Technologie umožňují začlenit konstruktivistické přístupy do výuky různých témat, jako jsou funkce a jejich vlastnosti, řešení rovnic a nerovnic či geometrické konstrukční úlohy. Zařazení uvedených metod posouvá výuku k experimentování, kdy žáci prostřednictvím řešení a modifikování různých situací samostatně „objevují“ vlastnosti matematických objektů a vazby mezi nimi. Ve výuce by však měl být vyhrazen také určitý prostor a čas pro různé formy teoretického zdůvodnění nalezených vztahů, a to podle úrovně matematických znalostí žáků. Podle Cihláře (2008) je používání technologií přínosem pouze tehdy, pokud se s jejich pomocí vytvoří vhodné prostředí pro učení žáků s dostatkem přitažlivých a relativně jednoduchých aplikací a nalezneme-li odvahu přizpůsobit tradiční učivo nové situaci.

Na základě výsledků uvedených výzkumů i vlastních zkušeností se domníváme, že při osvojování matematických vědomostí s podporou technologií záleží více na způsobu integrace technologií než na typu použitých prostředků (kalkulátor, počítač s vhodným programem, internet). Hlavním faktorem, který ovlivňuje využívání technologií ve školské matematice, se tak stává učitel, zejména jeho didaktické dovednosti a ICT kompetence.

## LITERATURA

ABDELFAH, H. A Story-based Dynamic Geometry Approach to Improve Attitudes toward Geometry and Geometric Proof. *The International Journal on Mathematics Education*. 2011, vol. 43, no. 3, p. 441–450. ISSN 1863-9704.

ARIAS, J. M., MAZA, I. S. Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en Matemáticas para la ESO y los Bachilleratos. *La gaceta de la RSME*. 2006, vol. 9, no. 1, p. 233–243 [online]. ISSN 1138-8927.

Dostupné z: <http://www.rsme.es/gacetadigital/vernumero.php?id=61>

AYDIN, H., MONAGHAN, J. Bridging the Divide-seeing Mathematics in the World through Dynamic Geometry. *Teaching Mathematics and Its Applications*. 2011, vol. 30, no. 1, p. 1–9. ISSN 1471-6976.

BACCAGLINI-FRANK, A., MARIOTTI, M. A. Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 2010, vol. 15, no. 3, p. 225–253. ISSN 1573-1766.

BAKI, A., GÜVELI, E. Evaluation of a Web Based Mathematics Teaching Material on the Subject of Functions. *Computers and Education*. 2008, vol. 51, no. 2, p. 854–863. ISSN 0360-1315.

BÖHM, J., et al. *The Case for CAS*. Münster : Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2004. 134 p. ISBN 3-934064-45-0.

- BURRILL, G. J., et al. *Handheld Graphing Technology in Secondary School Mathematics: Research Findings and Implications for Classroom Practice*. Dallas, TX : Texas Instruments, 2002, 122 p.  
Dostupné z: <http://ti-researchlibrary.com/default.aspx>
- CIHLÁŘ, J. Využití ICT ve výuce matematiky. In : Stehlíková, N. (ed.) *Jak učit matematiku žáky ve věku 11–15 let*. Plzeň : Vydavatelský servis, 2008. s. 9–18. ISBN 978-80-86843-17-9.
- ČÁP, J., MAREŠ, J. *Psychologie pro učitele*. Praha : Portál, 2001. 656 s. ISBN 80-7178-463-X.
- DAY, R. Classroom Technology: Tool for, or Focus of, Learning? *Mathematics Teacher*. 1996, vol. 89, no. 2, p. 134–137. ISSN 0025-5769.
- DION, G. *The Graphics Calculator: a Tool for Critical Thinking*. *Mathematics Teacher*. 1990, vol. 83, no. 7, p. 564–570. ISSN 0025-5769.
- DRIJVERS, P. H. M. *Learning algebra in a computer algebra environment*. Utrecht : CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education, 2003. 370 p. ISBN 90-73346-55-X.
- DUNHAM, P. H., DICK, T. *Research on Graphing Calculators*. *Mathematics Teacher*. 1994, vol. 87, no. 6, p. 440–445. ISSN 0025-5769.
- ELLINGTON, A. J. A Meta-analysis of the Effects of Calculators on Students' Achievement and Attitude Levels in Precollege Mathematics Classes. *Journal for Research in Mathematics Education*. 2003, vol. 34, no. 5, p. 433–463. ISSN 0021-8251.
- ERBAS, A. K., YENMEZ, A. A. The Effect of inquiry-based Explorations in a Dynamic Geometry Environment on Sixth Grade Students' Achievements in Polygons. *Computers and Education*. 2011, vol. 57, no. 4, p. 2462–2475. ISSN 0360-1315.
- FLADE, L., LICHTENBERG, W., PRUZINA, M. Zum Einsatz eines grafikfähigen Taschenrechners im Mathematikunterricht des Gymnasiums. *Mathematik in der Schule*. 1992, roč. 30, č. 3, s. 129–133. ISSN 9465-3750.
- FUNKHOUSER, C. The Effects of Computer Augmented Geometry Instruction on Student Performance and Attitudes. *Journal of Research on Technology in Education*. 2002, vol. 35, no. 2, p. 163–175. ISSN 1539-1523.
- GANTZ, L. A. *The Effects of the TI-Nspire CAS on Student Learning: A Phase I Project*. Virginia : George Mason University, 2008, 41 p. Dostupné z: <http://ti-researchlibrary.com/default.aspx>
- GAWLICK, T. On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom. *The International Journal on Mathematics Education*. 2002, vol. 34, no. 3, p. 85–92. ISSN 1863-9704.
- GILLIS, J. M. *An Investigation of Student Conjectures in Static and Dynamic Geometry Environments*. Auburn : Auburn University, 2005. Dissertation. 171 p.  
Dostupné z: [http://etd.auburn.edu/etd/bitstream/handle/10415/854/GILLIS\\_JOHN\\_2.pdf?sequence=1](http://etd.auburn.edu/etd/bitstream/handle/10415/854/GILLIS_JOHN_2.pdf?sequence=1)
- GRAFF, M., MAYER, P., LEBENS, M. Evaluating a Web Based Intelligent Tutoring System for Mathematics at German Lower Secondary Schools. *Education and Information Technologies*. 2008, vol. 13, no. 3, p. 221–230. ISSN 1573-7608.



- GUIN, D., RUTHVEN, K., TROUCHE, L. (eds.) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turing a Computational Device into a Mathematical Instrument*. Mathematics Education Library, vol. 36. New York : Springer, 2005. ISBN 0-387-23158-7.
- GÜVEN, B., KOSA, T. The Effect of Dynamic Geometry Software on Student Mathematics Teachers Spatial Visualization Skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*. 2008, vol. 7, no. 4. ISSN 1303-6521.  
Dostupné z: <http://www.tojet.net/articles/7411.pdf>
- HANSEN, H. B. *The Effects of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Interest*. Minnesota : Bemidji State University, 2004. Research paper. Dostupné z: <http://faculty.bemidjistate.edu/grichgels/MastersPapers/MastersList.htm>
- HATTERMANN, M. The dragging process in three dimensional dynamic geometry environments (DGE). In *Proceedings PME 32*, Figueras, O. et al. (eds.), 2008, p. 3-129–3-136. ISBN 978-968-9020-06-6.
- HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha : Portál, 2009. 232 s. ISBN 978-80-7376-397-0.
- HELLER, J., et al. *Impact of Handheld Graphing Calculator Use on Student Achievement in Algebra 1*. Heller Research Associates, 2005. 70 p. Dostupné z: [http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/research\\_heller\\_curtis.pdf](http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/research_heller_curtis.pdf)
- HENTSCHEL, T., PRUZINA, M. Graphikfähige Taschenrechner im Mathematikunterricht – Ergebnisse aus einem Schulversuch (in Klasse 9/10). *Journal für Mathematik Didaktik*. 1995, vol. 16, no. 3/4, p. 193–232. ISSN 0173-5322.
- HILL, J. R., et al. Exploring Research on Internet-based Learning: From Infrastructure to Interactions. In Jonassen, D. H. (ed.) *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*, p. 433–460. Lawrence Erlbaum Associates : USA, New Jersey, 2004. ISBN 0-8058-4145-8.
- HIRSCHHORN, D. B., THOMPSON, D. R. Technology and Reasoning in Algebra and Geometry. *Mathematics Teacher*. 1996, vol. 89, no. 2, p. 138–147. ISSN 0025-5769.
- HULL, A. N., BROVEY, A. J. The Impact of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Attitudes towards Mathematics. *Action Research Exchange* [online]. 2004, vol. 3, no. 1, 7 p. Dostupné z: <http://teach.valdosta.edu/are/>
- CHINO, K., et al. The Effects of „Spatial Geometry Curriculum with 3D DGS“ in Lower Secondary School Mathematics. In *Proceedings PME 31*, part 2, 2007, p. 137–144. ISSN 0771-100X.
- ISIKSAL, M., ASKAN, P. The Effect of Spreadsheet and Dynamic Geometry Software on the Achievement and Self-Efficacy of 7th-Grade Students. *Educational Research*, 2005, vol. 47, no. 3, p. 333–350. ISSN 1469-5847.
- JOHNSTON-WILDER, S., MASON, J. *Developing Thinking in Geometry*. London : Paul Chapman Publishing, 2006. 270 s. ISBN 1-4129-1169-9.
- KASTBERG, S., LEATHAM, K. Research on Graphing Calculators at the Secondary Level: Implications for Mathematics Teacher Education. *Contemporary Issues*

- in *Technology and Teacher Education* [online]. 2005, vol. 5, no. 1, ISSN 1528-5804. Dostupné z: <http://www.citejournal.org/vol5/iss1/mathematics/article1.cfm>
- KASTEN, S. A., SINCLAIR, N. Using Dynamic Geometry Software in the Mathematics Classroom: A Study of Teacher's Choices and Rationales. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*. 2009, vol. 16, no. 4, p. 133–143. ISSN 1744-2710.
- KHOJU, M., JACIW, A., MILLER, G. *Effectiveness of Graphing Calculators in K-12 Mathematics Achievement* [online]. Publikováno 2005 [cit. 2008-05-20]. Dostupné z: [http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/research\\_khojou\\_jaciw.pdf](http://education.ti.com/sites/US/downloads/pdf/research_khojou_jaciw.pdf)
- KVĚTOŇ, P. *Možnosti použití minikalkulátorů ve vyučování matematice na základní škole*. Spisy Pedagogické fakulty v Ostravě. Praha : SPN, 1983, 114 s.
- LABORDE, C. Integration of Technology in the Design of Geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 2001, vol. 6, no. 3, p. 283–317. ISSN 2211-1670.
- LABORDE, C., KYNIGOS, C., HOLLEBRANDS, K., STRÄSSER, R. Teaching and learning geometry with technology. In Gutiérrez, A., Boero, P. (eds.) *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam, The Netherlands : Sense Publisher, 2006, p. 275–304. ISBN 90-77874-19-4.
- LEISCHNER, P. *Rozvíjení prostorové představivosti žáků středních škol*. Praha : MFF UK, 2003, 150 s. Disertační práce.
- MACEDO-ROUET, M. et al. Students' Performance and Satisfaction with Web vs. Paper-Based Practice Quizzes and Lecture Notes. *Computers and Education*, 2009, vol. 53, no. 2, p. 375–384. ISSN 0360-1315.
- MERCER, J. Teaching Graphing Concepts with Graphing Calculators. *Mathematics Teacher*. 1995, vol. 88, no. 4, p. 268–273. ISSN 0025-5769.
- MOŠNA, F. Webové stránky s matematickým textem, In *Alternativní metody výuky*. Praha : Přírodovědecká fakulta, 2005, s. 84–89. ISBN 80-7305-511-2.
- NEUMAJER, O. *ICT kompetence učitelů: dizertační práce*. Praha : PedF UK, 2007, 167 s.
- NEUMAJER, O. Koncept 1 : 1 – notebook pro každého žáka – skrývá mnohá úskalí. *Metodický portál: Články*, 2009 [online]. ISSN 1802-4785. Dostupné z: <http://clanky.rvp.cz>
- NG, W. L., et al. Effects of Using a Computer Algebra System (CAS) on Junior College Students' Attitudes towards CAS and Achievement in Mathematics. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*. 2005, vol. 12, no. 2, p. 59–72. ISSN 1744-2710.
- OLDKNOW, A., TAYLOR, R. *Teaching Mathematics Using ICT*. 2nd Edition. London : Continuum, 2003, 262 s. ISBN 0-8264-7059-9.
- PITTA-PANTAZI, D., CHRISTOU, C. Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, vol. 70, no. 1, p. 5–6. ISSN 1573-0816.

- POWERS, R., et al. A Study of the Use of a Handheld Computer Algebra System in Discrete Mathematics. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*. 2005, vol. 12, no. 3, p. 103–113. ISSN 1744-2710.
- PUUSTINEN, M., et al. An Analysis of Students' Spontaneous Computer-mediated Help Seeking: A Step toward the Design of Ecologically Valid Supporting Tools. *Computers and Education*. 2009, vol. 53, no. 4, p. 1 040–1 047. ISSN 0360-1315.
- ROBOVÁ, J. *Grafické kalkulátory ve výuce matematiky na gymnáziu: dizertační práce*. Praha : Matematicko-fyzikální fakulta UK, 1998, 175 s.
- ROBOVÁ, J. *Integrace ICT jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice*. Praha : Pedagogická fakulta UK, 2012, 300 s. ISBN 978-80-7290-583-6.
- ROSCHELLE, J., GALLAGHER, L. *A Research Perspective on Using Graphing Calculator Interventions to Improve Mathematics Achievement*. Palo Alto, CA : SRI International, 2005, 12 p. Dostupné z: <http://ti-researchlibrary.com/default.aspx>
- RUTHVEN, K., et al. Constructions of Dynamic Geometry: A Study of the Interpretative Flexibility of Educational Software in Classroom Practice. *Computers and Education*. 2008, vol. 51, no. 1. p. 297–317. ISSN 0360-1315.
- RVP, G. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. Praha : VÚP, 2007, 100 s. ISBN 978-80-87000-11-3.
- SAK, P., et al. *Člověk a vzdělání v informační společnosti: vzdělávání a život v komputerizovaném světě*. Praha : Portál, 2007, 296 s. ISBN 978-80-7367-230-0.
- SANDE, C. A description and characterization of student activity in an open, online, mathematics help forum. *Educational Studies in Mathematics*, 2011, vol. 77, no. 1, p. 53–78. ISSN 1573-0816.
- SCHMIDT, K., et al. Introducing a Computer Algebra System in Mathematics Education — Empirical Evidence from Germany. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*. 2009, vol. 16, no. 1, p. 11–26. ISSN 1744-2710.
- SEDLÁČEK, L., POTŮČKOVÁ, S. *Projekt SIPVZ – tvorba a implementace softwarové podpory výuky matematiky na gymnáziu s využitím Cabri geometrie* [online]. Publikován 2007-01-03 [cit. 2008-06-16]. Dostupné z: <http://www.gztgm.cz/projekty/mat1/default.asp>
- UBUZ, B., et al. Effects of Dynamic Environment on Immediate and Retention Level Achievements of Seventh Grade Students. *Eurasian Journal of Educational Research*. 2009, vol. 35, p. 147–164. ISSN 1302-597X.
- VANÍČEK, J. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha : PedF UK, 2009, 212 s. ISBN 978-80-7290-397-8.
- VONDROVÁ, N., JANČAŘÍK, A. Implementation of Netbooks in the Teaching of Mathematics in Primary Schools. H. Beldhuis (ed.) *In 11th European Conference on e-Learning (ECEL 2012)*, University of Groningen The Netherlands, 2012, p. 567–574.
- WALTEROVÁ, E., et al. *Úloha školy v rozvoji vzdělanosti: 1. díl*. Brno : Paido, 2004, 295 s. ISBN 80-7315-083-2.
- WANG, K. H., et al. Learning Styles and Formative Assessment Strategy: Enhancing Student Achievement in Web-based learning. *Journal of Computer Assisted Learning*. 2006, vol. 22, no. 3, p. 207–217. ISSN 1365-2729.

WANG, T. H. Implementation of Web-based Dynamic Assessment in Facilitating Junior High School Students to Learn Mathematics. *Computers and Education*. 2011, vol. 56, no. 4, p. 1062–1071. ISSN 0360-1315.

WEGNER, S. B., HOLLOWAY, K. C., GARTON, E. M. The Effects of Internet-Based Instruction on Student Learning. *Journal of Asynchronous Learning Network*. 1999, vol. 3, no. 2, p. 98–106. ISSN 1092-8235.

WEIGAND, H. G. Teaching with a Symbolic Calculator in 10th Grade — Evaluation of One Year Project. *International Journal for Technology in Mathematics Education*. 2008, vol. 15, no. 1, s. 19–32. ISSN 1744-2710.

WEIGAND, H. G., BICHLER, E. Symbolic Calculators in Mathematics Lessons — The Case for CAS. *International Journal for Technology in Mathematics Education*. 2010, vol. 17, no. 1, p. 3–15. ISSN 1744-2710.

ŽILKOVÁ, K. *Školská matematika v prostředí IKT*. Bratislava : Vydavateľstvo UK, 2009, 136 s. ISBN 978-80-223-2555-4.

## PODĚKOVÁNÍ

Článek byl vytvořen v rámci výzkumného záměru PRVOUK P15 *Škola a učitelská profese v kontextu rostoucích nároků na vzdělávání*.

RNDr. Jarmila Robová, CSc. – E-mail: [jarmila.robova@mff.cuni.cz](mailto:jarmila.robova@mff.cuni.cz)

Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Česká republika