

Úspěšnost nadaných žáků při řešení matematické slovní úlohy

Success in solving mathematical word problems in gifted pupils

 Irena Budínová¹

¹ Pedagogická fakulta, Masarykova univerzita, Poříčí 31, 602 00 Brno; budinova@ped.muni.cz

Jedním z přístupů k odhalování matematického nadání žáků je práce s komplexními slovními úlohami, jejichž řešení může ovlivňovat charakter úloh i rozdílné profily nadání. Studie se zaměřuje na to, jak tyto faktory ovlivňují identifikaci matematicky nadaných žáků 5. ročníku základní školy. Cílem bylo (1) zjistit míru korelace mezi třemi metodami identifikace nadání – hodnocením učitele, výsledky standardizovaného testu a výsledky výzkumného didaktického testu – a (2) identifikovat úlohy, které nejlépe odlišují nadané žáky od ostatních. Výzkumný test obsahoval pět subtestů, čtyři algebraické a jeden kombinatorický, zaměřené na projevy typické pro nadané žáky, jako je flexibilita myšlení, schopnost zobecňování a tvořivost při řešení problémů. Studie klade důraz na analýzu subtestu s úlohami typu „myslím si číslo“, které umožňují odhalit skryté projevy nadání a přispět k jeho přesnější diagnostice. Výzkumu se zúčastnilo 45 žáků školy zaměřené na podporu nadaných. Pilotní charakter studie má posloužit jako základ pro tvorbu standardizovaného testu pro žáky 5.–7. ročníku. Výsledky ukazují střední až silnou korelaci mezi použitými metodami, ale i existenci jevů, které mohou vést k přehlédnutí matematicky nadaných žáků.

Klíčová slova:

nadaní žáci, identifikace nadání, matematická problémová úloha.

Zasláno 10/2024

Revidováno 8/2025

Přijato 10/2025

One approach to identifying mathematical talent in students is to work with complex word problems, the solution of which can be influenced by the nature of the problems and different talent profiles. The study focuses on how these factors influence the identification of mathematically gifted students in the 5th grade of primary school. The aim was (1) to determine the degree of correlation between three methods of identifying talent – teacher assessment, standardized test results and research didactic test results – and (2) to identify tasks that best distinguish gifted students from others. The research test included five subtests, four algebraic and one combinatorial, focused on manifestations typical of gifted students, such as flexibility of thinking, ability to generalize and creativity in problem solving. The study emphasizes the analysis of the subtest with tasks of the “I think of a number” type, which allow to reveal hidden manifestations of talent and contribute to its more accurate diagnosis. The research involved 45 students from a school focused on supporting the gifted. The pilot nature of the study is intended to serve as a basis for the creation of a standardized test for students in grades 5–7. The results show a moderate to strong correlation between the methods used, but also the existence of phenomena that may lead to the overlooking of mathematically gifted students.

Key words:

gifted students, identification of giftedness, mathematical problems.

Received 10/2024

Revised 8/2025

Accepted 10/2025

1 Úvod

Snaha o přesné určení matematických schopností nadaných žáků nás provází již desítky let. Už na konci 19. století se objevily první pokusy o stanovení individuálních matematických schopností a již v té době byly pozorovány v kontextu řešení matematických problémů (Krutetskii, 1976; Szabo et al., 2024). Od 60. let 20. století byly do výzkumu aplikovány psychometrické metody, které měly určovat matematické schopnosti jednotlivců (Szabo et al., 2024). Tyto metody však nevedly k vymezení charakteristik matematicky nadaných žáků a od posledních desetiletí 20. století byly podrobeny kritice jakožto nespolehlivá metoda pro indikování matematických schopností (Szabo et al., 2024). Již v průběhu minulého století si totiž výzkumníci začali všimnout toho, že lidé, kteří se projevují jako nadaní v matematice, se raději zhloubají do problému, než aby předváděli rychlé řešení podle známého algoritmu. Například Hadamard (1945) upozornil, že špičkoví vědci, jako byl Albert Einstein, při řešení obtížného matematického problému zažili poměrně dlouhou, nevědomou dobu inkubace, než byli schopni transformovat intuitivní myšlenky na vědomé, užitečné nápady. Sternberg a Williams (2002) v této souvislosti zase hovoří o tendenci nadaných žáků používat složitější způsoby myšlení, než je nutné, a nazývají ji *komplexním myšlením*.

Identifikace nadaných žáků představuje důležitý krok k jejich dalšímu rozvoji a vhodnému vedení v hodinách matematiky. V kontextu matematického vzdělávání si výzkumníci již řadu let kladou otázku, jak se projevuje matematicky nadaný žák a jaké jsou možnosti jeho identifikace. Identifikace některých typů nadaných žáků je však ve školním prostředí problematická, což může vést k absenci rozvoje nadání žáka a následně k jeho podvýkonnosti (Betts & Neihart, 1988). Jak dokládají data, v České republice není

řada nadaných žáků identifikována. Podle České školní inspekce (ČŠI, 2022, s. 12) polovina základních škol v České republice, které mají pouze první stupeň, nehlásí žádné nadané žáky a mezi plně organizovanými základními školami je to pětina takových škol. V základních školách bylo ve školním roce 2023/2024 pouhých 0,27 % žáků identifikováno jako nadaných (MŠMT, 2024).

Identifikace a rozvoj nadaných žáků ve škole jsou však klíčové pro naplnění jejich potenciálu, podporu motivace a seberealizace, prevenci školního neúspěchu a přínos celé společnosti. Prvotní identifikaci nadání může provést učitel přímo ve třídě na základě svého posouzení, které však může být subjektivní. Jak upozorňují Jabůrek et al. (2022), učitelovo posouzení vychází z řady kritérií, jako jsou kognitivní schopnosti žáka, akademické schopnosti žáka, ale také například socio-emocionální nebo motorické dovednosti žáka. Pokud učitel žáka na základě svého posouzení vytipuje, má možnost si svůj soud ověřit jednak pomocí standardizovaného testu, který mu nabídne repertoár úloh, které nejsou zaměřeny na běžně probírané učivo a obsahují úlohy citlivěji měřící nadání, a jednak pomocí běžných školních testů. Ty ale obvykle obsahují specifické a omezené spektrum matematických úloh, které nemusí být pro identifikaci nadání vhodné. Jak upozorňuje Warne (2012), testy pro ověřování běžných školních znalostí a dovedností nejsou vhodné pro identifikaci nadání, neboť měří střední úroveň dovedností a pro nadané žáky jsou příliš snadné. Matematická úloha v sobě může obsahovat i různá další rizika, kvůli kterým nemusí spolehlivě odlišovat nadané žáky od ostatních. V některých úlohách z dřívějšího výzkumu se projevilo to, že zatímco běžní žáci volili algoritmické postupy, které se naučili ve škole, nadaní žáci promýšleli náročnější postupy a tím se snížila jejich úspěšnost (Budínová, 2018).

Hlavním cílem výzkumu bylo zjistit, jaký je vztah mezi identifikací nadání pomocí standardizovaného testu a pomocí výzkumného didaktického testu sestaveného z algebraických slovních úloh, a dále jaký je vztah mezi identifikací nadání pomocí standardizovaného testu a na základě posouzení učitelem. Výzkumný didaktický test byl sestaven na základě poznatků z odborné literatury i vlastních zkušeností autorky. Nadaní žáci často prokazují specifické schopnosti v řešení matematických problémů, zejména těch, které vyžadují systematizaci dat, abstraktní uvažování a schopnost nacházet neobvyklá řešení (Machů et al., 2013). Jedním z prostředků, jak tyto schopnosti odhalit, je zaměřit se na specifické dovednosti nadaných žáků, jako je například schopnost identifikovat vzory a vztahy mezi různými prvky nebo zobecnovat matematické poznatky (Gutiérrez et al., 2018). Jako typ úloh, který dokáže odhalovat právě tyto dovednosti, jsem vybrala algebraické slovní úlohy. Druhým vhodným typem úloh, ve kterých řešitel hledá více řešení, což klade nároky na organizaci a systematizaci dat, jsou úlohy kombinatorické (Vondrová, 2020).

Druhým cílem bylo zjistit, které úlohy z jednoho subtestu didaktického testu obsahujícího algebraické slovní úlohy odlišují nadané žáky od ostatních. Konečně bylo mým záměrem zjistit, jaké fenomény se projeví v písemných řešeních algebraických slovních úloh u nadaných žáků a u žáků ostatních. Tato analýza byla součástí kvalitativního vyhodnocení dat a shledávám ji jako důležitou zejména z důvodu posouzení toho, zda nadaní žáci používali jiné postupy nebo prováděli jiné typy chyb než ostatní žáci.

Výzkum měl smíšený design a zúčastnili se ho žáci tří tříd 5. ročníku jedné základní školy.

2 Teoretický rámec

2.1 Matematické schopnosti nadaných žáků

Krutetskii a jeho tým dospěli k závěru, že matematicky nadaní žáci jsou schopni (Krutetskii, 1976)¹

- efektivně získávat a formalizovat matematické informace;
- efektivně zpracovávat matematické informace – logickým myšlením, rychlým a širokým zobecněním matematických pojmů a vztahů a snahou o jasná a jednoduchá řešení;
- efektivně uchovávat a vybavovat zobecněné matematické vztahy;
- představovat obecně propojené matematické komponenty.

Matematicky nadaní žáci jsou dále schopni kompenzovat své méně rozvinuté schopnosti těmi více rozvinutými (Krutetskii, 1976), což jim umožňuje snadněji hledat alternativní řešení úlohy, když neznají algoritmus, který je na řešení potřeba. Při řešení problémových úloh mají tendenci zvnitřňovat intuitivní myšlenky a přístupy a zkracovat své úvahy (Krutetskii, 1976; Szabo et al., 2024). V důsledku toho je pro učitele obtížné sledovat matematické uvažování nadaných žáků při řešení problémových úloh.

Když se v průběhu 20. století začalo ukazovat, že intelektově nadaní lidé nemusí v dospělém životě své schopnosti využívat podle toho, jak se od nich očekávalo na základní škole, začal se Renzulli (1978) zabývat

¹Přestože je tento popis už více než 40 let starý, v literatuře je stále citován (Szabo et al., 2024).

výzkumem tvořivě-produktivních lidí, kteří dosáhli v určité oblasti jedinečných výsledků. Zjistil, že se tyto lidé vyznačovali interakcí tří vlastností, a to nadprůměrnými schopnostmi, tvořivostí a angažovaností v úkolu. Odlišil školní nadání, které lze dobře využít ve škole, a tvořivě-produktivní nadání, které je potřeba mimo školu. I z tohoto pohledu je tedy obtížné říct, kdy již budeme žáka ve škole považovat za nadaného a dostaneme možnost (zejména časovou a finanční) se mu více věnovat.

Pro různé *stupně nadání* bývá využívána výše inteligenčního kvocientu, a to zpravidla tak, jak ukazuje tab. 1 (např. Fořtík & Fořtíková, 2007; Havigerová, 2011).

Tab. 1: Jeden ze způsobů rozdělení výkonu v inteligenčním testu do intervalů

IQ	Označení úrovně kognitivních schopností jedince	Výskyt v populaci
115–129	Bystrý jedinec	14,0 %
130–144	Nadprůměrně nadaný	2,0 %
145–159	Vysoce nadaný	0,1 %

Zcela jiné intervaly pro míru intelektového nadání však nacházíme u Gagného (2005, s. 109, tab. 2).

Tab. 2: Gagného metrický systém intervalů v populaci nadaných/talentovaných (Gagné, 2005)

IQ	Označení	Výskyt v populaci
120–134	Mírně nadaný	10 %
135–144	Středně nadaný	1 %
145–154	Vysoce nadaný	0,1 %
155–164	Mimořádně nadaný	0,001 %
165 a více ²	Extrémně nadaný	0,0001 %

Renzulli vytvořil identifikační systém, který nevychází pouze z výše inteligenčního kvocientu, ale zaměřuje se rovněž na tvořivost a angažovanost v úkolu. Navrhl, aby v tomto systému bylo 15 % studentů považováno za nadané (Renzulli, 2005).

Z těchto různých pojetí nadání vyplývá, že i ve školním prostředí bývá obtížné určit, koho označit jako nadaného a koho už ne. Hříbková (2009) uvádí, že za nadaného bývá ve škole považován ten žák, který v daném předmětu dosahuje mimořádných výkonů ve srovnání s výkony svých vrstevníků. To však může v běžné výuce být i žák, který se dobře učí, avšak nadaný není. Pokud se však chceme zabývat nadanými žáky, a to jak na úrovni teoretické, tak praktické, některé rozdělení přijmout musíme.

2.2 Možnosti identifikace nadání

Nadání tedy můžeme chápat různým způsobem a podle toho také provádět jeho identifikaci. Jednoduchý způsob identifikování nadání vychází z IQ definice nadání (Budínová, 2018). Míra nadání v tomto modelu je posuzována od IQ 120. Při hranici 120 se jedná přibližně o 9,1 % populace a při hranici 130 o 2,2 % populace (McBee & Makel, 2019). Pokud se na nadání budeme dívat v širším spektru, např. pomocí Renzulliho Tříkruhového modelu nadání (Renzulli, 1978), budou počty nadaných žáků značně jiné. Podle Renzulliho identifikačního systému, který se zaměřuje na schopnosti, tvořivost a angažovanost v úkolu, by mělo být za nadané považováno přibližně 15 % studentů (Renzulli, 2005), jak již bylo uvedeno výše.

Zásadní roli v tom, jak se nadání u jednotlivých žáků projevuje, hrají tzv. *profily nadání*. Nadání jedinci nejsou homogenní skupina, liší se schopnostmi, silnými i slabými stránkami, komunikací s okolím, způsoby učení se aj. Profily nadání určují, v jakých oblastech a jakým způsobem se nadání projevuje, a jsou proto klíčové pro správnou identifikaci i efektivní pedagogickou podporu. Betts a Neihart (1988) zavedli šest profilů nadaných žáků, které se zaměřují na různé projevy nadání. Pojmenovali je *úspěšní nadaní*, *autonomní žáci*, *skrývači nadání*, *defenzivní odpadlíci*, *provokatéři* a *žáci s dvojitou výjimečností*. Z těchto šesti profilů nadaných žáků jsou ve škole snadno identifikovatelné pouze první dvě skupiny žáků. Betts a Neihart (1988) tvrdí, že asi 90 % identifikovaných žáků ve školních programech má profil úspěšných nadaných. U žáků z ostatních profilů je identifikace nadání komplikovaná, a to z důvodu možného nesouladu mezi vnímáním nadání a jeho projevů a skutečnými projevy dítěte.

Příkladem jsou nadaní žáci s dyslexií, kteří jsou písemným testováním velmi obtížně identifikovatelní, neboť jsou schopni při běžném školním testování dosahovat zlomku výkonu, který odpovídá jejich potenciálu. Výkony těchto žáků navíc klesají při časově omezeném testování (Portešová, 2011; Portešová et al., 2014). Žáci s dyslexií tak mohou dosáhnout jen částečného úspěchu oproti tomu, kdyby měli možnost napsat test v nestresových podmínkách bez časového omezení. Dalšími faktory omezujícími výkony

²V České republice neexistuje test, který by měřil intelektové nadání v takto vysokých pásmech.

žáka s dyslexií jsou např. deficit ve schopnosti rychle si vybavit pojmy z dlouhodobé paměti, v pracovní rychlosti, v zapamatování či v nedostatečné grafomotorické rychlosti apod. (Portešová et al., 2014). Jak Portešová et al. (2014) upozorňují, u nadaných žáků s dyslexií vznikají různé paradoxy mezi jejich kognitivními schopnostmi a jejich handicapem. Proto jsou tito žáci často označováni jako *paradozní žáci a studenti* (Tannenbaum & Baldwin, 1983).

Identifikace nadaných žáků je komplexním procesem, který vyžaduje kombinaci různých metod a nástrojů. Podle Machů et al. (2013) stojí na počátku identifikace nominační metody (pozorování dítěte, nominace učitelem, spolužákem nebo rodičem), poté následují hromadné metody (didaktické testy, skupinově zadávané IQ testy) a vše je završeno individuálními metodami, vedenými odborníkem, např. z pedagogicko-psychologické poradny (rozhovor, individuálně zadávané testy). Diagnostika prostřednictvím didaktických testů tedy figuruje v prostřední fázi identifikace nadání a může proběhnout na půdě školy. Testová úloha má však také své různé limity a rizika, kvůli kterým nemusí k identifikaci nadání dojít. Dřívější studie poukázala na fakt, že některé úlohy zvládnou lépe žáci, kteří nejsou označeni jako nadaní (Budínová, 2018). Jsou různé faktory, které úspěšnost nadaných žáků ovlivňují – aritmetická snadnost či náročnost úlohy, možnost použití náročnějšího matematického aparátu, ke které inklinují právě nadaní žáci z důvodu komplexního myšlení, které popsali Sternberg a Williams (2002), nebo volba problémových úloh, u nichž žák nezná algoritmus řešení a musí postup řešení odhalit na základě svých dosavadních znalostí, dovedností a zkušeností a které jsou náročné pro všechny skupiny žáků.

Z uvedených důvodů může vzniknout nesoulad mezi identifikací nadání jedince různými metodami. Běžné školní testy prověřují zvládnutí základního učiva, zpravidla neobsahují problémové úlohy a z toho důvodu se pro identifikaci nadaných žáků nehodí. Existuje například nesoulad mezi aritmetickými schopnostmi a schopností logického uvažování. Straker (1980) uvádí, že mnozí úspěšní matematici o sobě přiznávají, že nejsou příliš dobří v aritmetice. Školní identifikace nadání může být dále poznamenána tím, jací žáci jsou považováni za nadané. Hříbková (2009) uvádí, že za nadaného je často považován ten žák, který svými výkony převyšuje své vrstevníky. Může se ale právě jednat o dobré počtáře, kteří nemají rozvinuté logické myšlení. Oproti tomu těžkopádně působící nadaný žák, který při řešení úlohy používá komplexní myšlení (Sternberg & Williams, 2002), za nadaného považován být nemusí.

2.3 Problémové matematické úlohy jako zdroje identifikace nadání

Matematické problémové úlohy a proces jejich řešení jsou často považovány za ústřední součásti matematického vzdělávání (Liljedahl et al., 2016). Nemusí být ovšem tak jednoznačné a jednoduché určit, která úloha je pro řešitele problémová. Obecně lze říci, že pokud se řešitel s daným typem úlohy již setkal a osvojil si algoritmus řešení, problémová pro něj není, ať by byla jakkoli náročná či nestandardní. Matematický problém by proto měl obsahovat určitou část řešení, která je pro řešitele zcela nová. Taková úloha by mohla lépe odlišovat nadané žáky od ostatních, protože nadaní žáci by měli mít větší schopnost se v nové situaci zorientovat a volit alternativní způsoby řešení (Krutetskii, 1976). Nadaní žáci mohou při řešení nerutinního úkolu projevit kreativní matematické myšlení (Lithner, 2013), zatímco ostatní žáci mohou inklinovat k tomu, že přebírají předkládané postupy, aniž by byli jejich tvůrci.

Matematická úloha, která by se dala využít v testu tak, aby odlišila nadaného žáka, by však měla splňovat určité nároky, které nyní zmíním.

Za prvé, některé úlohy mohou být příliš náročné i pro matematicky nadané žáky, pokud je mají zvládnout v časovém limitu. V některých úlohách dokonce mohou být průměrní žáci úspěšnějšími řešiteli než žáci nadaní (Budínová, 2018). Bývají to ty úlohy, u kterých žáci s průměrnými výsledky v matematice mohou použít jednoduché algoritmické řešení, zatímco nadaní žáci vymýšlejí nevšední postup.

Za druhé, u nadaných žáků by se podle Bloomovy taxonomie kognitivních cílů (Bloom, 1956; Krathwohl, 2002) měla pozornost přesunout z úrovně aplikace na úroveň analýzy. Na této úrovni je žák nucen úkolu hlouběji porozumět, protože zadání není koncipováno tak, aby bylo řešení zřejmé na první pohled. K vyřešení úlohy je třeba hlubšího vhledu a schopnosti rozpoznat vztahy mezi jednotlivými částmi problému. Tyto úlohy obvykle zahrnují více kroků a kladou vyšší nároky na logické uvažování a schopnost strukturovat řešení.

Za třetí, s nadáním úzce souvisí i úroveň metakognice žáka. Metakognice je vnímána jako důležitá součást žákova rozvoje a poznávacího procesu. Jedna z prvních definic metakognice ji vymezuje jako znalost a regulaci vlastního kognitivního systému (Brown, 1987). Můžeme říci, že metakognice je schopnost jedince uvědomovat si vlastní poznávací schopnosti – myšlení, vnímání, paměť apod. – a využívat výsledky tohoto uvědomění při učení, řešení problémů a při dalších aktivitách, do kterých se tyto poznávací schopnosti zapojují (Straka, 2021). Jiní autoři ji vymezují jako schopnost žáka monitorovat svoji aktuální úroveň porozumění danému tématu (Bransford et al., 2004). Žák se učí poznávat různé postupy, zvažuje jejich efektivitu, učí se vhodně volit řešitelské strategie, ale také se učí poznávat sám sebe, své silné a slabé stránky.

Nadaní žáci často vykazují oproti vrstevníkům zvýšené metakognitivní dovednosti, tedy schopnost plánovat, monitorovat a hodnotit své myšlení a učení (Alexander et al., 1995; Machů et al., 2013). Avšak i nadaní žáci potřebují svoji metakognici rozvíjet, což je možné zejména prostřednictvím problémových úloh. Pokud se žák s takovými úlohami nesetkává, metakognice se rozvíjet nemusí a nadaný žák nerozšiřuje svoji znalostní, dovednostní a metakognitivní základnu (Alexander et al., 1995). Problémové matematické úlohy umožňují nadaným žákům rozvíjet metakognici, pokud se nezaměřujeme pouze na správnost výsledku, ale rovněž na postup řešení – zda žák nepoužívá povrchové strategie řešení, zda si data vhodně systematizuje, aby byl schopen úspěšně najít řešení, zda kontroluje správnost svého postupu i výsledku aj.

Jako vhodný typ matematických úloh, které splňují výše uvedené nároky, se jeví slovní úlohy. Slovní úlohy jsou důležitou součástí výuky matematiky. Umožňují aplikovat osvojené matematické učivo, rozvíjí u žáků schopnost použít matematické poznatky v běžných situacích, rovněž rozvíjí matematické myšlení, neboť často neumožňují žákům použít mechanicky osvojené procedury (Vondrová et al., 2019). Pro řešení slovních úloh musí žák mimo jiné dobře porozumět textu. Např. Cummins et al. (1988) uvádějí, že stejná úloha zadaná jednou aritmeticky a podruhé jako slovní úloha má podstatně větší úspěšnost v prvním případě, a současné výzkumy potvrzují úzkou souvislost mezi řešením slovních úloh a čtenářskou gramotností (Vondrová et al., 2019). To naznačuje, že k úspěchu při řešení slovních úloh přispívají i jiné faktory než pouze matematické dovednosti.

Boonen et al. (2016) uvádějí, že pro řešení slovních úloh jsou zapotřebí dvě klíčové dovednosti. Za prvé, důležitým faktorem přispívajícím k hlubšímu porozumění textu slovní úlohy je schopnost sestavit smysluplnou a koherentní mentální reprezentaci obsahující všechny prvky relevantní pro řešení, které jsou odvozeny z textové báze slovní úlohy. To znamená, že řešitelé slovních úloh si musí vytvořit kvalitní situační model, v němž si uvědomují aktéry a vztahy mezi nimi skryté v textu (Boonen et al., 2016; Vondrová et al., 2019). To může pro žáka představovat obtíž v případě, kdy si takový situační model nevytvoří a použije *povrchové strategie řešení* (Vondrová et al., 2019), ve kterých se např. zaměřuje pouze na čísla v zadání bez toho, aby je analyzoval (Boonen et al., 2016). Druhou důležitou individuální dovedností, která rozhoduje o úspěšnosti řešení slovních úloh a která je podložena výzkumnými důkazy, je již zmíněná schopnost žáka číst s porozuměním (Boonen et al., 2016).

Z těchto závěrů vyplývá fakt, že při řešení slovních úloh mohou být úspěšnější ti řešitelé, kteří se více vyznaží v textu, mají širší slovní zásobu a umí si představit kontext úlohy. U matematicky nadaných žáků to může platit pro ty žáky, kteří mají své silné stránky také v jazykové oblasti. To ale jistě nejsou všichni matematicky nadaní žáci. Dle Gardnerovy teorie mnohačetných inteligencí (Gardner, 2006) jsou jazyková a logicko-matematická inteligence navzájem nezávislé. Na druhou stranu, jazykově i matematicky nadaní žáci vykazují obecné charakteristiky nadaných žáků, kterými jsou především bohatá slovní zásoba, schopnost abstrakce a generalizace, metakognitivní dovednosti, kritické myšlení, flexibilita a originalita řešení (Machů et al., 2013). Tyto charakteristiky tvoří určité překryvy mezi jazykovým a matematickým nadáním.

Kromě těchto dvou klíčových dovedností sestává komplexní teorie o řešení slovních úloh z dalších komponent, jako je například potřeba formálního výpočtu pro získání výsledku (Nathan et al., 1992). Všechny vyžadované dovednosti vedou k tomu, že jsou slovní úlohy pro mnoho žáků, nadaných i ostatních, výzvou a mohou v nich selhávat ve větší míře než v úloze vyžadující provedení konkrétní početní operace.

2.4 Výzkumné otázky

Výzkum vychází z popsaného teoretického rámce a má dva cíle. Tím prvním je zjistit vzájemný vztah mezi stanovením matematického výkonu žáků třemi metodami: standardizovaným testem, vlastním testem, který budu nazývat *výzkumným testem*, a posouzením učiteli. Výzkumný test měl za cíl zjistit, které úlohy jsou vhodné pro identifikaci nadání. Druhým cílem je prozkoumat schopnost konkrétní testové úlohy odlišovat žáky vzhledem k nadání.

Pro výzkum byly tedy stanoveny následující výzkumné otázky:

- O1: *Jak si odpovídají výsledky identifikace nadání ve standardizovaném testu a ve výzkumném testu?*
- O2: *Jak si odpovídá posouzení matematických schopností žáka učitelem a výsledek ve standardizovaném testu?*
- O3: *Jak odlišuje nadání konkrétní úloha jednoho ze subtestů výzkumného testu?*
- O4: *Jaké fenomény se vyskytují v řešeních žáků, nadaných i ostatních, u úloh v jednom ze subtestů výzkumného testu?*

3 Metodologie

Pro zodpovězení výzkumných otázek byla zvolena smíšená metodologie. Byly vyhodnoceny výsledky celého výzkumného testu a každého ze subtestů. Sledovala jsem korelace mezi třemi uvedenými metodami stanovení nadání žáka – mezi stanovením nadání učitelem, percentilem určeným standardizovaným testem a výsledkem získaným ve výzkumném testu. Na stanovení vztahu mezi výsledkem ve standardizovaném testu a stanovením nadání učitelem byla použita Spearmanova korelace. Rovněž na stanovení vztahu mezi výsledkem ve standardizovaném testu a výsledkem ve výzkumném testu byla využita Spearmanova korelace. Kromě deskriptivní statistiky byly stanoveny hypotézy popisující vztah mezi úspěšností v úloze zkoumaného subtestu a výsledkem standardizovaného testu. Hypotézy byly testovány pomocí Pearsonova chí-kvadrátu.

Kvalitativní šetření se zaměřovalo na fenomény vyskytující se v řešeních žáků.

3.1 Účastníci výzkumu

Výzkum probíhal v průběhu školního roku 2023/2024 v jedné základní škole Jihomoravského kraje, která má jako jednu ze svých priorit péči o nadané žáky. Nejedná se však o školu výkonově zaměřenou nebo vzdělávající pouze nadané žáky. To znamená, že zde najdeme všechny výkonnostní skupiny žáků. Škola se snaží o vnitřní diferenciaci a žáky separuje podle výkonu pouze jednou týdně, kdy se učitelé zaměřují na výuková specifika každé ze tří skupin (žáci s poruchami učení a žáci s podprůměrnými výsledky v matematice, žáci s průměrnými výsledky v matematice, nadaní žáci). Žáci nejsou do těchto skupin rozdělováni podle známek, ale podle jejich schopností a motivace k rozšiřujícímu studiu matematiky. Například skupina nadaných žáků, která je vedena v rámci klubu pro nadané, je vybírána na základě speciálního školního testování a také dlouhodobého pozorování žáků, aby se do skupiny dostali žáci motivovaní pro vzdělávání.

Spolupráce probíhala se třemi učiteli. Účast ve výzkumu byla pro žáky dobrovolná a z celkového počtu 83 žáků ze tří tříd 5. ročníku se do testování zapojilo 45 žáků. Pátý ročník byl vybrán ze dvou důvodů. Prvním důvodem bylo to, že standardizovaný test TIM³⁻⁵, který bude představen dále, je určen pro žáky 3. až 5. ročníku. Druhým důvodem byl záměr vytvořit na základě výsledků tohoto výzkumného šetření standardizovaný test pro žáky 5. až 7. ročníku.

Žáky jsem znala osobně. Se skupinou nadaných žáků jsem v daném školním roce pracovala v rámci jejich klubu pro nadané a všechny zapojené žáky jsem pozorovala při řešení úloh během jejich plnění výzkumného testu.

3.2 Popis výzkumného šetření

Na začátku výzkumu byli vyučující požádáni, aby uvedli, jak žáky posuzují vzhledem k jejich výkonu v matematice. Ve vzorku bylo podle nich 5 matematicky nadaných žáků, 8 žáků nadaných, 1 nadaný žák s dysortografií, 1 žák s nadprůměrnými výsledky, 28 žáků s průměrnými výsledky, 2 žáci s podprůměrnými výsledky.

Žáci byli nejdříve podrobeni testování standardizovaným *Testem pro identifikaci nadaných žáků v matematice TIM³⁻⁵* (Cígler et al., 2017). Dle Cíglera et al. (2017) test TIM³⁻⁵ vykazuje dobrou vnitřní konzistenci (Cronbachovo α v rozmezí 0,67–0,91 dle ročníku a formy), uspokojivou stabilitu ($r = 0,68$ – $0,78$) a velmi vysokou shodu mezi hodnotiteli (ICC = 0,99). Faktorová analýza potvrzuje jednodimenzionální strukturu testu (TLI = 0,97; RMSEA = 0,02). Souběžná validita s inteligenčními testy je středně silná ($r \approx 0,64$) a test zároveň dobře rozlišuje nadané žáky od běžné populace (Cohenovo $d \approx 1,2$ – $1,8$).

Test (Cígler et al., 2017) určil pro jednotlivé žáky jejich percentil, na kterém se pravděpodobně pohybují v matematických schopnostech. Na základě výsledků v testu byli žáci rozděleni do skupin nadaných a ostatních. Při stanovování hranice nadání jsem vycházela z teoreticky popsanych způsobů rozdělení nadání, v nichž jsem se přiklonila k Renzulliho pojetí, v kombinaci s dlouhodobým pozorováním žáků, ke kterému jsem dostala příležitost při sledování jejich práce. Mnou vybraná hranice nadání byl 85. percentil ve standardizovaném testu TIM³⁻⁵. Z dlouhodobého hlediska byli žáci z tohoto pásma schopni podávat stabilně nadprůměrné výkony, a to i v nestandardních úlohách.

Následně žáci řešili postupně v měsících prosinec roku 2023, leden, únor a březen roku 2024 pět subtestů. Na řešení měli tolik času, kolik potřebovali (žák test odevzdal, až byl hotov), aby se odstranily například hendikepy žáků s dyslexií. Byli vždy požádáni, ať uvádí také postup řešení úlohy.

3.3 Výzkumný test

Výzkumným nástrojem byl didaktický test, sestávající z pěti subtestů o šesti slovních úlohách (úlohy typu „myslím si číslo“, dělení celku na nestejně části, úlohy vedoucí na soustavy rovnic, diofantické

rovnice, kombinatorika, viz příloha). Úlohy v subtestech byly gradovány od těch, které by dle očekávání autorky, podloženého dlouholetým praktikováním diferencované výuky matematiky, měli zvládnout i žáci s průměrnými výkony v matematice, až po ty, které by měly být výzvou i pro nadané žáky. Vzhledem k tomu, že se jednalo o pilotní studii, nebyla gradace úloh předem ověřována.

Do testu byly vybrány slovně formulované úlohy s kontextem i bez něj. Slovní úlohy jsou, jak bylo uvedeno výše, pro žáky výzvou, protože je nutné zorientovat se v textu, najít podstatné informace a ty zapsat a zpracovat matematicky. Algebraické slovní úlohy jsou náročné na nalezení vztahů mezi veličinami. V nižších ročnících jsou řešeny experimentální či aritmetickou strategií, od 8. ročníku, kdy se obvykle probírají rovnice, mohou žáci použít také strategii algebraickou. I když v dřívější studii bylo zjištěno, že u nadaných žáků dochází někdy k osvojení algebraické strategie dříve, než je probírána ve škole (Budínová, 2018). Je pravděpodobné, že se u těchto úloh projeví aritmetická zručnost žáka, jeho aritmetická představivost i dovednost najít pro situaci ze zadání správný matematický model. Kombinatorické úlohy kladou důraz na porozumění struktuře problému a vytvoření systému při řešení, který umožní najít všechny možnosti (Vondrová, 2020). Nadaní žáci mohou mít v těchto úlohách výhodu oproti svým vrstevníkům díky kreativitě (Krutetskii, 1976; Renzulli, 1978), flexibilitě a originalitě myšlení (Machů et al., 2013) a schopnosti přecházet k alternativním postupům řešení (Krutetskii, 1976).

Úlohy do výzkumného testu byly voleny vzhledem k autorce známým parametrům, které mohou ovlivňovat obtížnost úlohy. Např. náročnost úlohy ovlivňuje volba čísel. Žáci nejsnadněji pracují s malými přirozenými čísly, velká a složitá čísla (například čísla s velkým počtem cifer, zlomky s velkým jmenovatelem aj.) mohou snížit úspěšnost (Vondrová et al., 2019). Například dělení $24 : 6$ zvládnou žáci i z paměti, oproti tomu $14\,652 : 37$ může některé žáky od řešení úlohy odradit. V úlohách jsem proto čísla volila tak, aby žáka nenaváděla na požadovanou operaci, ale zároveň aby nebyla zdrojem dalších chyb, které jsem nesledovala. Do slovních úloh můžeme dále přidávat *antisignály* (*distraktory*) nebo nadbytečné údaje, které úlohu dále ztěžují. Antisignál můžeme popsat jako slovo nebo slovní spojení, které navádí řešitele na nesprávnou operaci (např. Adetula, 1990). Různé studie (mezinárodní i tuzemské) ukázaly, že při použití antisignálu je slovní úloha pro žáky obtížnější (Vondrová et al., 2019), proto jsem ji zařadila do výzkumného testu.

3.4 Popis úloh subtestu Úlohy typu „Myslím si číslo“

V tomto článku se zaměřuji na první subtest výzkumného testu. Při vyhodnocování byly posuzovány:

- správnost výsledku;
- zapsaný postup (zda žák zapsal jen výsledek, zda rozepsal postup, jaký postup řešení byl použit);
- zapisování odpovědi;
- písemné provedení zkoušky správnosti;
- specifické fenomény (implikační zápis, volba chybné metody řešení).

V následujícím textu budou představeny jednotlivé úlohy subtestu a autorčino očekávání řešení žáků.

Úloha 1. *Myslím si číslo. Když k němu přičtu 8, dostanu 22. Které číslo si myslím?*

Úloha 1 je jedнокroková, k jejímu řešení stačí jeden výpočet. Jednoduchost úlohy vede u řady žáků k tomu, že nemají potřebu zapisovat postup a píšou jen výsledek, který určili z paměti. Očekávala jsem, že žáci zapíší pouze výsledek (14) nebo odpověď („myslíš si 14“), případně aritmetický výpočet $22 - 8 = 14$. Neočekávala jsem problémy s antisignálem (je použito slovo přičtu, ačkoli se má odčítat), neboť úloha je snadná na vytvoření představy. V testu úloha plní roli spíše motivační, aby žáci dosáhli úspěchu na začátku testu.

Úloha 2. *Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma a od výsledku odečtu 3, dostanu 7. Které číslo si myslím?*

Úloha 2 je dvoukroková, mnoho žáků však zřejmě nebude mít potřebu postup zapisovat a výsledek určí z paměti. Očekávala jsem zapsání výsledku (5) nebo odpovědi („myslíš si 5“), případně aritmetického výpočtu $7 + 3 = 10$, $10 : 2 = 5$.

Úloha 3. *Myslím si číslo. Když od něj odečtu 7 a výsledek vydělím dvěma, dostanu 8. Které číslo si myslím?*

Úloha 3 je také dvoukroková a na první pohled se až na pořadí operací příliš neliší od druhé úlohy. Rozdíl oproti druhé úloze je však ve větších číslech, což by mohlo snížit úspěšnost. Očekávala jsem aritmetické řešení $8 \cdot 2 = 16$, $16 + 7 = 23$. Dále bylo sledováno, zda někteří žáci neprovedli operaci $8 : 2$ místo $8 \cdot 2$, což by mohli provést v případě, že použijí povrchovou strategii řešení.

S úlohami podobnými uvedeným třem se zkoumaní žáci občas setkali ve výuce a byli seznamováni s tzv. postupem řešení od konce. V posledních minimálně pěti týdnech před testováním však takové úlohy do výuky zařazeny nebyly.

Úloha 4. *Myslím si číslo. Když ho vynásobím samo sebou a k získanému součinu přičtu myšlené číslo, dostanu 90. Které číslo si myslím?*

Úloha 4 je nestandardní úloha a lze předpokládat, že se žáci s tímto typem setkali poprvé až v testu. Nelze na ni použít metodu od konce a je nutné vytvořit situační model, který umožní úlohu vyřešit. Čísla jsou úmyslně volena tak, aby při znalosti malé násobilky žák řešení rychle odhalil: $9 + 9 \cdot 9 = 9 + 81 = 90$. Pokud by žák řešil úlohu na základě této představy, očekávala jsem, že zapíše pouze výsledek. V opačném případě může postupovat experimentálně. Zvolí např. číslo 6 a provede s ním operace: $6 + 6 \cdot 6 = 6 + 36 = 42$, postupně zvětšuje volené číslo.

Úloha 4 má druhé řešení v oboru celých čísel: $-10 \cdot (-10) - 10 = 90$. Vzhledem k věku žáků jsem však neočekávala, že budou uvažovat tímto způsobem, a plný počet bodů obdrželi po nalezení řešení z oboru přirozených čísel.

Úloha 5. *Myslím si dvojciferné číslo. Když vytvořím jeho ciferný součet (například ciferný součet čísla 25 je $2 + 5 = 7$) a vynásobím ho dvěma, dostanu myšlené číslo. Které číslo si myslím?*

Rovněž úloha 5 je nestandardní a vyžaduje nejen vytvoření modelu situace, ale také porozumění všem termínům v zadání. Očekávala jsem experimentální řešení, buď metodou pokusu a omylu, nebo řízeným experimentem. Při řízeném experimentu může žák postupovat tak, že vybere dvojciferné číslo, určí jeho ciferný součet, vynásobí ho dvěma a z výsledku posoudí, jak vybrané číslo změnit: např. $36; 3 + 6 = 9; 9 \cdot 2 = 18$, číslo 18 je o 18 menší než 36, pokusí se zmenšit vybrané číslo, např. $27; 2 + 7 = 9; 9 \cdot 2 = 18$, číslo 18 je o 9 menší než 27. Postupně lze vypořádat, že ciferný součet musí být alespoň 5, jinak jeho vynásobením dvěma nezískáme dvojciferné číslo. Největší ciferný součet je 18, což je vynásobeno dvěma 36, a dané číslo musí být menší než 36. Výsledkem je 18; $1 + 8 = 9; 9 \cdot 2 = 18$.

Úloha 6. *Myslím si číslo. Když k němu přičtu trojnásobek tohoto čísla, dostanu 24. Které číslo si myslím?*

Úloha 6 je úloha s antisignálem. Jako antisignál zde vystupuje slovní spojení „přičtu trojnásobek“, které může žáky navést k tomu, aby číslo 24 dělili třemi. Pokud žák bude situaci analyzovat a vytvoří si situační model, bude postupovat například dělením čísla 24 čtyřmi, neboť $24 : 4 = 6; 6 + 3 \cdot 6 = 24$. Hledané číslo je 6. Pokud žák bude postupovat povrchově, nechá se zmást slovem „trojnásobek“ a bude počítat $24 : 3 = 8$.

3.5 Analýza dat

Data, tedy písemná žákovská řešení, byla nejdříve zpracována co do úspěšnosti řešení. Úlohy v subtestech 1, 2 a 3 byly bodovány 1 (správná odpověď) nebo 0 (nesprávná odpověď). V těchto subtestech bylo tedy možné dosáhnout maximálně 6 bodů. V úlohách, které měly více řešení, což byly úlohy vedoucí na diofantické rovnice a kombinatorické úlohy (subtesty 4 a 5), bylo bodování odlišné: V případě, že žák našel všechna řešení, dostal 2 body, v případě, že našel jen některá řešení, dostal 1 bod. V celém testu mohl tedy žák získat nejvýše 46 bodů.

Při analýze dat byla nejprve použita deskriptivní statistika, s jejíž pomocí byly zjišťovány výsledky pro celý výzkumný test a jednotlivé subtesty, četnosti bodových hodnocení jednotlivých úloh, relativní četnosti, aritmetický průměr, medián, kvartilové rozdělení a charakteristiky rozptýlení (rozptyl a směrodatná odchylka). Následně byly stanoveny korelace mezi jednotlivými metodami posuzování matematických schopností: jednak korelace mezi percentilem, který byl určen standardizovaným testem, a výsledkem ve výzkumném testu, jednak korelace mezi výsledky v testu a úrovní nadání, která byla stanovena vyučujícími. Za tím účelem byl použit Spearmanův korelační koeficient pořadí, což je statistická metoda používaná k hodnocení síly a směru monotónního vztahu mezi dvěma proměnnými, jejichž hodnoty lze seřadit podle pořadí. Tento koeficient je vhodný zejména tehdy, když nelze předpokládat lineární vztah mezi proměnnými nebo když data nevyhovují požadavkům na normalitu, k čemuž dochází například tehdy, když se pracuje s malými výběry (Hendl, 2012). Korelace byly testovány na hladině významnosti 5 %.

Kromě deskriptivního popisu výsledků výzkumného souboru byly stanoveny také hypotézy popisující vztah mezi úspěšností v každé úloze subtestu 1 a nadáním. U každé z šesti úloh byla tedy stanovena nulová hypotéza H_0 : *Úspěšnost v úloze nezávisí na nadání*. Hypotézy byly testovány na hladině významnosti 5 %. Výsledky byly statisticky zpracovány v programu *Statistica*.

V kvalitativní části byla provedena analýza řešení jednotlivých úloh, různých přístupů žáků k řešení a opakující se chyby. Byly sledovány strategie řešení úloh a jevy charakteristické pro jednotlivé úlohy,

jako je např. implikační zápis, využití distraktoru aj. Nejprve jsem vytvořila rámec kódování na základě didaktické analýzy úloh, a pak jsem tento rámec rozšířila o nové kategorie, které vzešly přímo z reálných řešení žáků. V článku budou představeny výsledky pro úlohy subtestu 1. Ostatní subtesty již byly také analyzovány a některé byly či budou publikovány (doposud Budínová, 2025).

4 Výsledky

4.1 Vyhodnocení výzkumného testu jako celku

Stručně představíme celkové výsledky výzkumného celku a poté se zaměříme na to, jak koresponduje identifikace nadání prostřednictvím standardizovaného testu a identifikace nadání prostřednictvím výzkumného testu. Dále nás bude zajímat, jak koresponduje stanovení nadání učitelem s identifikací nadání standardizovaným testem.

Jak je uvedeno výše, žáci mohli ve všech úlohách výzkumného testu získat maximálně 46 bodů. Nejvyšší získané skóre bylo 41 bodů a nejnižší 1 bod. Průměr byl 20,1 bodů a směrodatná odchylka 10,3, medián 19,0, kvartilové rozdělení: 1. kvartil (Q1): 12, 3. kvartil (Q3): 29. Procentuální úspěšnost v jednotlivých úlohách podle subtestu je uvedena v tab. 3.

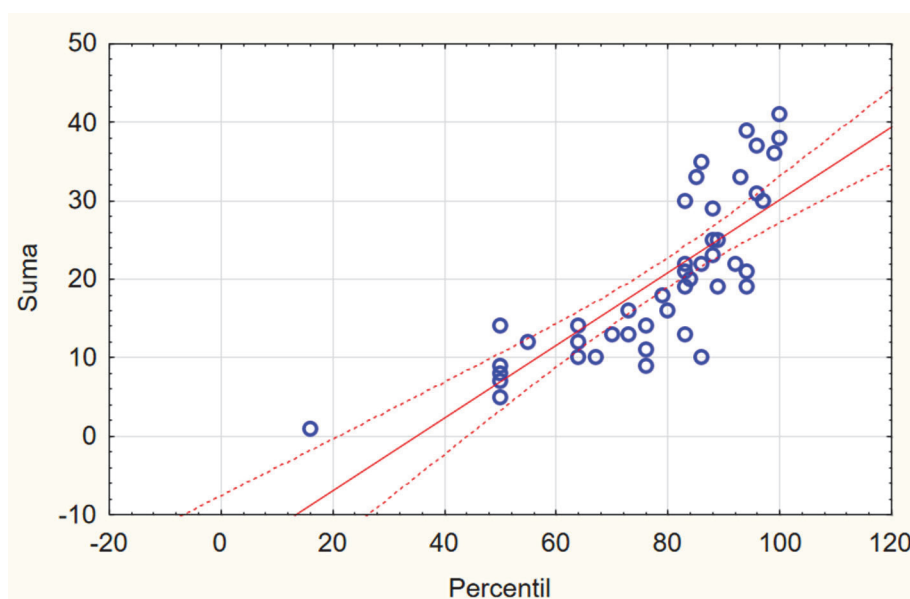
Tab. 3: Procentuální úspěšnost v úlohách subtestů

Subtest	Úloha 1	Úloha 2	Úloha 3	Úloha 4	Úloha 5	Úloha 6
1	96 %	84 %	78 %	64 %	31 %	29 %
2	40 %	58 %	42 %	53 %	27 %	29 %
3	67 %	64 %	40 %	40 %	18 %	18 %
4	82 %	58 %	47 %	41 %	33 %	21 %
5	82 %	41 %	27 %	39 %	22 %	14 %

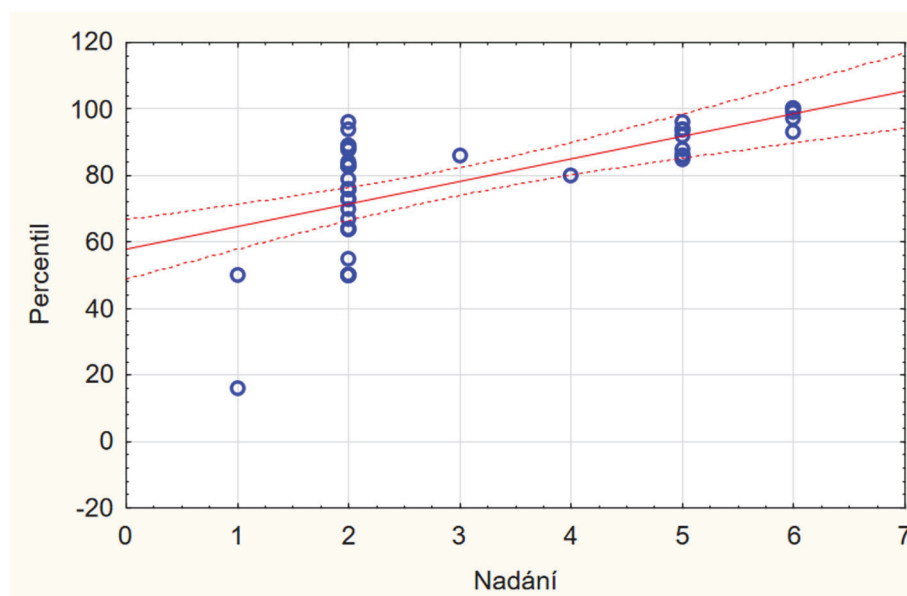
Korelace mezi percentilem, který byl určen standardizovaným testem, a výsledkem ve výzkumném testu byla statisticky významná na hladině významnosti 0,05 (percentil vs. suma bodů: Spearmanovo $R = 0,86$, $t(N - 2) = 11,07$, $p < 0,001$).

Lze tedy konstatovat, že test jako celek (s pěti subtesty a celkem 30 úlohami) stanovuje nadání poměrně spolehlivě. Z grafu na obr. 1 však vidíme skupinu žáků mezi 80. a 95. percentilem, kteří získali v testu relativně málo bodů (8 až 22 bodů z 46 bodů). Vhodným vysvětlením tohoto faktu může být výskyt náročných úloh, které byly i pro nadprůměrné či nadané žáky komplikované a snižovaly jejich úspěšnost.

Také korelace mezi percentilem, který byl stanoven standardizovaným testem, a úrovní nadání, která byla stanovena vyučujícími, byla statisticky významná na hladině významnosti 0,05 (percentil vs. nadání: Spearmanovo $R = 0,72$, $t(N - 2) = 6,87$, $p < 0,001$).



Obr. 1: Suma bodů ve výzkumném testu proti percentilu ve standardizovaném testu



Obr. 2: Percentil ve standardizovaném testu proti nadání podle učitelů

Z grafu na obr. 2 lze za prvé vyčíst, že žáci označení učiteli jako matematicky nadaní získali jako skupina dle očekávání nejvyšší skóre ve standardizovaném testu. Jako matematicky nadaný je obvykle učitelem označen žák, který v běžných školních testech dosahuje výborných výsledků. Protože matematicky nadaní žáci obvykle dobře zvládají i nestandardní úlohy, dalo se očekávat, že dosáhnou vysokého skóre i ve standardizovaném testu, který právě takové úlohy obsahoval. Za druhé, žák s dysortografií označený učitelem jako nadaný má horší výsledky než všichni žáci označení jako nadaní a také než jeden žák označený jako žák s nadprůměrnými výsledky a několik žáků s průměrnými výsledky. Za třetí, řada žáků, kteří byli učiteli označeni jako žáci s průměrnými výsledky, dosahovali ve standardizovaném testu výsledků stejných jako žáci označení jako nadaní.

Lze tedy konstatovat, že posouzení učitelů je v mnoha případech vypovídající, ale zejména u skupiny žáků s průměrnými výsledky vidíme, že na základě projevů žáka v hodinách matematiky je žák vnímán jako průměrný, avšak při řešení problémových úloh dosahuje neočekávaně dobrých výsledků.

Na základě výsledků ve standardizovaném testu TIM³⁻⁵ a ve výzkumném testu bylo ve vzorku identifikováno 20 žáků nadaných.

4.2 Nadaní žáci a výsledky úloh subtestu 1

V tomto oddíle je zjišťováno, do jaké míry lze úlohy v subtestu 1 výzkumného testu využít pro testování nadání.

Tab. 3 ukazuje, že úspěšnost úloh subtestu 1 klesá dle očekávání podle zvyšující se náročnosti úloh. První dvě úlohy jsou velmi jednoduché, žádná úloha nemá úspěšnost menší než 20 %, a nebyla tedy pro žáky příliš náročná. Pro pochopení toho, jak daná úloha testuje a zda je schopna odlišit žáky nadané a ostatní, však bude vhodné podívat se na výsledky v závislosti na matematických schopnostech žáků. Nulová hypotéza *Úspěšnost v dané úloze nezávisí na nadání* nebyla zamítnuta pro úlohy 1, 2, 3 a byla zamítnuta pro úlohy 4, 5, 6 (tab. 4). Lze tedy konstatovat, že v posledních třech úlohách testu úspěšnost žáka v dané úloze závisí na nadání.

Tab. 4: Procentuální úspěšnost úloh subtestu 1 podle nadání

	Úloha 1	Úloha 2	Úloha 3	Úloha 4	Úloha 5	Úloha 6
Nadaní (20 žáků)	100 %	95 %	85 %	95 %	55 %	60 %
Ostatní (25 žáků)	92 %	76 %	72 %	40 %	12 %	4 %
Hladina významnosti rozdílu výsledků (p)	0,076	0,065	0,143	< 0,001	0,003	0,005

Ve všech úlohách jsou nadaní žáci úspěšnější než ostatní žáci. V prvních třech úlohách však rozdíl není podstatný a není statisticky významný. Statisticky významné rozdíly na hladině významnosti 0,05 lze sledovat až u posledních tří úloh. U úloh 5 a 6 byla i u nadaných žáků relativně nižší úspěšnost, a tyto úlohy tedy pro stanovování úrovně nadání příliš vhodné nejsou. U úlohy 5 byl jedním ze zatěžujících faktorů použitý jazyk. Pojem ciferný součet i přes vysvětlení zřejmě činil řadě žáků potíže. Někteří žáci zadání zřejmě porozuměli a prováděli experiment (většinou neřízený), nedokázali z něj však vyvodit správné

závěry a úlohu nechali nedořešenou. U poslední úlohy byl zatěžujícím faktorem distraktor. Žáci, kteří jsou zvyklí používat povrchové strategie a neanalyzují dostatečně situaci, se nechali navést na nesprávný výpočet. Tuto chybu dělali také nadaní žáci, i když ne v tak velkém procentu jako žáci ostatní. V našem vzorku to konkrétně byla čtvrtina žáků nadaných a (necelé) tři čtvrtiny žáků ostatních, kteří provedli chybný výpočet $24 : 3 = 8$.

Nejvhodnější pro stanovení úrovně nadání je z těchto úloh úloha 4 (Pearsonův chí-kvadrát = 14,67, $p < 0,001$). Je to úloha, u níž žáci nemohli mít natrénovaný postup řešení a zároveň si museli vytvořit situační model. Úloha však neobsahovala další jevy, které by byly příliš zatěžující i pro nadané žáky. Rozdíl mezi nadanými a ostatními žáky se tedy nejvíce projevil ve čtvrté úloze, u níž žákům nebyl znám algoritmus, ale současně zadání nesvádělo k použití povrchových strategií řešení.

4.3 Kvalitativní analýza řešení žáků

V tomto oddíle uvádím převládající řešení žáků u jednotlivých úloh a poté časté fenomény, které bylo možné v řešeních žáků sledovat. Analýza se zaměřovala na řešení všech žáků ze vzorku. V případě, kdy u skupiny nadaných žáků převažoval určitý způsob řešení, je tento fakt zmíněn.

Úlohu 1 někteří žáci vyřešili z paměti a zapsali pouze výsledek (v 5 případech), ale nejčastěji zapsali výpočet jako na obr. 3 (ve 38 případech). Vzhledem k jednoduchosti úlohy se neobjevily žádné neočekávané jevy.

Myslím si číslo. Když k němu přičtu 8, dostanu 22. Které číslo si myslím?



$$22 - 8 = 14$$

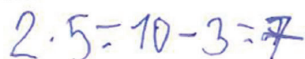
$$\underline{14}$$

Obr. 3: Ukázka řešení úlohy 1

Úlohu 2 stále někteří žáci vyřešili z paměti (17 žáků), ale více žáků postup zapsalo. Nejčastěji při tom postupovali od konce (ve 24 případech), tedy úvahou $7 + 3 = 10$, $10 : 2 = 5$.

Dva kroky, které úloha vyžadovala, vedly některé žáky k implikačnímu zápisu (v 19 případech). To je zápis, ve kterém žák postupně zapisuje své na sebe navazující myšlenky, ale vznikající zápis je matematicky nesprávný. Ukázka implikačního zápisu je na obr. 4. Žák v tomto případě nezapsal ani odpověď.

Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma a od výsledku odečtu 3, dostanu 7. Které číslo si myslím?

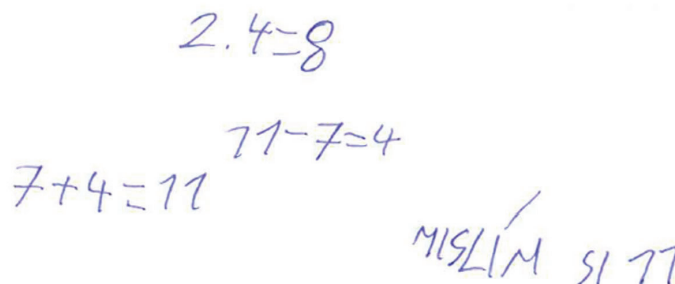


$$2 \cdot 5 = 10 - 3 = 7$$

Obr. 4: Ukázka řešení úlohy 2 s implikačním zápisem

Obdobné postupy byly u úlohy 3, ale ta měla nižší úspěšnost u obou skupin žáků. Z paměti úlohu vyřešilo 17 žáků, metodou od konce 19 žáků. Žáci častěji učinili numerickou chybu (ve 4 případech) nebo zaměnili jednu z operací (ve 4 případech). Ukázku řešení se záměnou operací vidíme na obr. 5. Žák chybně interpretoval obrat „výsledek vydělím dvěma“ a tuto část počítal jako $2 \cdot 4 = 8$. Chybějící zkouška správnosti způsobila, že chyba nebyla odstraněna.

Myslím si číslo. Když od něj odečtu 7 a výsledek vydělím dvěma, dostanu 8. Které číslo si myslím?



$$2 \cdot 4 = 8$$

$$11 - 7 = 4$$

$$7 + 4 = 11$$

Myslím si 77

Obr. 5: Chybné řešení úlohy 3 se záměnou operace

Velmi často se však objevilo řešení, kdy žák určil hledané číslo z paměti a následným zápisem pouze deklaroval správnost svých myšlenek (12 žáků), viz obr. 6.

Myslím si číslo. Když od něj odečtu 7 a výsledek vydělím dvěma, dostanu 8. Které číslo si myslím?

$$23 - 7 = 16 : 2 = 8 \quad 23$$

$$8 \cdot 2 = 16 + 7 = 23$$

Obr. 6: Správně vyřešená úloha s naznačením postupu inverzními operacemi

Implikační zápis byl u třetí úlohy použit v 10 případech.

V úloze 4, která nejlépe odlišovala žáky nadané od ostatních, byly použity nejčastěji tyto postupy: žák úlohu vyřešil z paměti a zapsal buď správný kontrolní výpočet (23 žáků), nebo jen výsledek (4 žáci), žák volil metodu pokusu a omylu (5 žáků), nebo žák nechal úlohu nevyřešenou či použil chybnou úvahu (13 žáků). Třetí a čtvrtou variantu volili nejčastěji žáci nenadaní. Ukázka správného řešení s implikačním zápisem je na obr. 7.

Myslím si číslo. Když ho vynásobím samo sebou a k získanému součinu přičtu myšlené číslo, dostanu 90. Které číslo si myslím?

$$9 \cdot 9 = 81 + 9 = 90 \quad 9$$

Obr. 7: Ukázka implikačního zápisu

Implikační zápis použilo ve čtvrté úloze 17 žáků.

Úloha byla pro řadu žáků, zejména ostatních, náročná z důvodu uvedené slovní formulace, ke které žáci obtížně hledali matematický model. Objevily se problémy s porozuměním tomu, co znamená „vynásobit číslo samo sebou“, kdy žáci často přistupovali ke sčítání dvou stejných čísel nebo k dělení dvěma jako na obr. 8.

Myslím si číslo. Když ho vynásobím samo sebou a k získanému součinu přičtu myšlené číslo, dostanu 90. Které číslo si myslím?

$$90 : 2 = 45$$

$$45 \cdot 2 = 90$$

Myslím si číslo 45.

Obr. 8: Chybné pochopení vztahů ze zadání

Úlohu 5 žáci řešili nejčastěji z paměti (napsali jen výsledek, případně s příslušným výpočtem, 11 žáků), metodou pokusu a omylu (neřízený experiment, 5 žáků), řízeným experimentem (3 žáci), nebo úlohu nechali nevyřešenou (26 žáků). Na obr. 9 je správně vyřešená úloha s implikačním zápisem. Žák své myšlenky zkrátil natolik, že dokonce dal rovnítko mezi číslo a jeho ciferný součet.

Myslím si dvojciferné číslo. Když vytvořím jeho ciferný součet (například ciferný součet čísla 25 je $2+5=7$) a vynásobím ho dvěma, dostanu myšlené číslo. Které číslo si myslím?

$$18 = 1 + 8 = 9 \cdot 2 = 18 \quad 18$$

Obr. 9: Správně vyřešená úloha 5 s implikačním zápisem

Na obr. 10 je ukázka neřízeného experimentu, při kterém žák nedokázal využít získaných výsledků k tomu, aby došel ke správnému závěru.

Myslím si dvojčíferné číslo. Když vytvořím jeho ciferný součet (například ciferný součet čísla 25 je $2+5=7$) a vynásobím ho dvěma, dostanu myšlené číslo. Které číslo si myslím?

22 $2+2=4$ $4 \cdot 2=8$ Myslím si číslo?.

13 $1+3=4$ $4 \cdot 2=8$

15 $1+5=6$ $6 \cdot 2=12$

16 $1+6=7$ $7 \cdot 2=14$

33 $3+3=6$ $6 \cdot 2=12$

99 $9+9=18$ $18 \cdot 2=36$

Obr. 10: Nedořešená úloha 5 metodou pokusu a omylu

U úlohy 6 se jako velmi silný faktor projevil distraktor. Žáci se tak rozdělili na ty, kteří si správné vztahy mezi čísly uvědomili (13 žáků), na ty, kteří se nechali svést distraktorem (28 žáků), a na ty, kteří úlohu neřešili (4 žáci). Pokud žáci použili distraktor, provedli výpočet $24 : 3 = 8$ a jako výsledek uvedli 8 (viz obr. 11). Jak již bylo uvedeno výše, na nesprávný výpočet se zadáním nechala navést čtvrtina žáků nadaných a tři čtvrtiny žáků ostatních.

Myslím si číslo. Když k němu přičtu trojnásobek tohoto čísla, dostanu 24. Které číslo si myslím?

$$24 : 3 = 8$$

8

Obr. 11: Úloha 6 vyřešená nesprávným výpočtem

Na obr. 12 je uvedeno stručné a implikační řešení matematicky nadaného žáka, který výsledek uvádí přímo ve výpočtu.

Myslím si číslo. Když k němu přičtu trojnásobek tohoto čísla, dostanu 24. Které číslo si myslím?

$$\textcircled{6} \cdot 3 = 18 + \textcircled{6} = 24$$

Obr. 12: Správně vyřešená úloha 6 s implikačním zápisem

Žáci mnohdy svůj výsledek zapsali číslem nebo slovní odpovědí, ale už jej nepodrobovali kontrole. Na obr. 13 je příklad řešení, v němž žák navrhl chybný postup řešení, který nekonfrontoval se zadáním, a v důsledku následného neprovedení zkoušky svoji chybu neodhalil.

Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma a od výsledku odečtu 3, dostanu 7. Které číslo si myslím? = 17

$$2 \cdot 7 = 14 + 3 = \underline{\underline{17}}$$

Obr. 13: Ukázka chybného řešení a neprovedené zkoušky

5 Diskuse

5.1 Identifikace nadání

Zjištění této studie potvrzují, že identifikace matematického nadání ve školním prostředí je komplexní a mnohvrstevnatý proces, který nelze zúžit pouze na výsledky standardizovaných testů či posouzení učitelem (Machů et al., 2013; Szabo et al., 2024). Ačkoliv byla mezi výsledky standardizovaného testu a výkonem ve výzkumném testu nalezena silná korelace, podrobnější analýza ukázala významné individuální odchylky vztahující se k jednotlivým úlohám. Tyto rozdíly poukazují na faktory, které se pojí s testovou úlohou a které mohou výkon nadaných žáků ovlivnit – zejména náročnost úloh a typ zadaných úloh. Ačkoli problémová matematická úloha je chápána jako těžiště nejen testování, ale také vzdělávání nadaných žáků (Liljedahl et al., 2016), i v našem testování se ukázalo, že najít mezi úlohami takovou, která citlivě měří nadání, je složitý úkol. Zatímco úlohy, u nichž žáci již znají postup řešení, problémové nejsou a může je algoritmicky vyřešit i průměrný žák, úlohy s příliš zatěžujícími faktory jsou náročné i pro nadané žáky, kteří takovou úlohu nemusí, například z důvodu nedostatečné zkušenosti, zdárně vyřešit. V našem testování se jako takový nepřiměřeně náročný parametr ukázala přítomnost antisignálu (distraktoru) v 6. úloze, což je v souladu s výsledky výzkumů (Vondrová et al., 2020). Druhým zatěžujícím faktorem, který ovlivňoval výkony i nadaných žáků, byla jazyková stránka úlohy s ciferným součtem.

Významným zjištěním je fakt, že řada žáků s vysokým skóre ve výzkumném testu nebyla učiteli označena jako nadaní. To potvrzuje již dřívější upozornění (např. Hříbková, 2009), že školní hodnocení často odráží spíše výkonnost v rutinních úlohách a přizpůsobivost školnímu systému než skutečný potenciál žáka. Je zde patrný soulad s modelem Bettse a Neihart (1988), který upozorňuje na existenci „skrytých“ či podvýkonných nadaných žáků, jejichž schopnosti se ve školním prostředí nemusí plně projevit.

Dalším důležitým aspektem je samotná povaha použitých matematických úloh. Dle očekávání se ukázalo, že úlohy rutinního typu nejsou pro rozpoznání nadaných vhodné, neboť nezachycují kreativní či alternativní způsoby řešení. Kreativita je jednou z vlastností, kterou se nadaní jedinci odlišují od ostatních (Lithner, 2017; Renzulli, 1978) a kterou lze v matematice odhalovat zadáváním nevšedních problémových úloh, se kterými se jedinec dosud nesetkal. Nadaný žák by se měl v neznámé situaci snáze zorientovat a hledat alternativní způsoby řešení (Krutetskii, 1976). Zároveň však příliš komplexní problémové úlohy – pokud nejsou citlivě vybrány – mohou být natolik náročné, že při jejich řešení selhávají i nadaní žáci. To se potvrdilo i v předloženém výzkumu a je v souladu se zjištěními autorů jako Hadamard (1945), Krutetskii (1976) nebo Lithner (2017), že nadaní žáci potřebují prostor pro hlubší porozumění problému a často přemýšlejí více divergentně. Pokud však není testování navrženo tak, aby tento způsob uvažování zohlednilo (např. časově, strukturou úloh), může být výsledek zkreslený.

Z výsledků dále vyplývá, že pouze jedna z analyzovaných úloh se ukázala jako vhodná pro rozlišení mezi nadanými a ostatními žáky. Byla to právě ta, která nespouštěla automatické řešitelské strategie a zároveň nenutila žáky k povrchovému uvažování. To podporuje myšlenku, že úlohy používané pro identifikaci nadaných by měly být nejen originální a neobvyklé, ale zároveň by i u nadaných žáků měly zohledňovat různé možnosti selhání, které pramení například z malé zkušenosti nadaných žáků s problémově zadávanými úlohami.

5.2 Fenomény v písemných řešeních žáků

Kvalitativní analýza písemného řešení úloh odhalila několik jevů. Velmi častým jevem, a to i u nadaných žáků, byl implikační zápis. Tento typ zápisu ve většině případů nevede k chybě, ale poukazuje na chybné chápání ekvivalence, které může žákovi činit problémy u rovnic (Budínová, 2018). Implikační zápis se objevoval rovnoměrně u nadaných i ostatních žáků. Druhým často sledovaným jevem bylo používání povrchových strategií. Žák dle zadání zvolil určitý postup, ale nepodroboval ho hlubší analýze a nezjišťoval, zda zvolený postup odpovídal zadání. Povrchové strategie byly patrnější u skupiny ostatních žáků.

Třetím fenoménem bylo neprovádění zkoušek správnosti výsledku vzhledem k zadání, což se projevovalo napříč vzorkem a může poukazovat na nerozvinutou metakognici. Tento nedostatek platil pro obě skupiny žáků, avšak s tím rozdílem, že nadaní žáci méně často udělali chybu ve výpočtu či v úvaze, a tak se absence kontroly výsledku neprojevovала tak výrazně, jako u ostatních. Zvýšená metakognice je sice jedním z atributů nadání (Alexander et al., 1995; Machů et al., 2013), jenže i nadaný žák potřebuje dostávat k jejímu rozvoji příležitost. Naopak projev rozvinuté metakognice jsem shledávala v ochotě měnit strategie řešení, přecházet mezi strategiemi dle potřeby a tím zvyšovat možnost úspěchu. To platilo poměrně pro obě skupiny žáků, nadané i ostatní. Když žáci neznali postup řešení, velmi často vybrali metodu pokusu a omylu, aby úlohu vyřešili. Rozdíl mezi řešeními nadaných žáků a ostatních byl spíše v tom, že nadaní žáci používali přímočařejší řešení (leckdy z paměti či aritmeticky), zatímco u ostatních žáků bylo více typické experimentování či zanechání úlohy bez řešení. Přecházení mezi strategiemi se však vyskytovalo u obou skupin. Domnívám se, že to mohlo být proto, že jsou žáci z výuky zvyklí na

zadávaní nestandardních úloh, u kterých neznají algoritmus řešení. Experimentální strategie je ve škole, v níž výzkum probíhal, vnímána jako relevantní možnost řešení.

6 Limity výzkumu

Hlavním limitem výzkumu je malý počet respondentů. Všichni žáci, kteří se výzkumu zúčastnili, navíc navštěvují stejnou základní školu. Učitelé, kteří žáky vyučují, byli tři, tedy alespoň v tomto ohledu byla zachována určitá diverzita. Ovšem charakter školy, která je otevřena vzdělávání nadaných žáků, mohl výsledky testování ovlivnit. Pokud bychom chtěli získat spolehlivější data, bylo by nutné výzkum zopakovat na podstatně větším počtu žáků z různých typů škol.

Dalším z omezení výzkumu bylo rozdělení žáků na nadané a ostatní, které si vyžádalo stanovení jasného kritéria. Ačkoli bylo toto rozdělení založeno na odborné literatuře, dlouhodobém pozorování žáků a výsledcích standardizovaného testu, je třeba si uvědomit, že pojetí nadání může být různé. Zvolená kritéria tak nemusejí plně zachycovat všechny jeho dimenze a výsledné rozdělení nemusí být zcela vypovídající.

Limitující byl i výběr typu úloh, tedy algebraických a kombinatorických úloh. Ačkoli jsou úlohy z uvedených oblastí školské matematiky vhodné pro rozvoj i testování nadaných žáků z toho úhlu pohledu, že vyžadují prokázat orientaci ve vztazích uvedených v zadání, pro jejich řešení je mnohdy potřebná kreativita a schopnost volit alternativní způsoby řešení, nebo najít všechna řešení, přesto nepokrývají celou škálu dovedností, kterou se nadaní liší od ostatních. Jiné typy úloh by mohly přinést jiné závěry.

7 Závěr

Cílem výzkumu bylo určení vztahu mezi výsledkem v daném výzkumném testu a percentilovým hodnocením získaným na základě jiného standardizovaného testu, a dále mezi výsledkem ve výzkumném testu a posouzením úrovně nadání vyučujícím matematiky. Cílem výzkumu bylo také zjistit, do jaké míry jednotlivé úlohy testu přispívají k identifikaci nadaných žáků a jak dokážou tyto žáky odlišit od jejich vrstevníků.

Výsledky analýz ukazují, že percentil žáků silně souvisí jak s jejich výkonem ve výzkumném testu, tak s učitelským hodnocením matematického nadání. Korelace mezi percentilem a výsledkem testu byla velmi vysoká (Spearmanovo $R = 0,860$; $p < 0,001$), což potvrzuje, že percentil spolehlivě predikuje úspěšnost žáků. Silný vztah byl zjištěn také mezi percentilem a učitelským soudem (Spearmanovo $R = 0,720$; $p < 0,001$), což naznačuje, že učitelé ve velké míře dokáží odhadnout schopnosti žáků na základě jejich výkonu.

Přesto bodové grafy odhalily určité nesoulady. V případě vztahu mezi percentilem a výsledkem ve výzkumném testu byla patrná skupina žáků v rozmezí 80.–95. percentilu, kteří v testu získali pouze 8–22 bodů (z maximálních 46). Tento rozdíl lze pravděpodobně vysvětlit charakterem výzkumného testu, jehož úlohy byly náročné i pro nadané žáky. Podobně se i u korelace mezi percentilem a učitelským soudem ukázala skupina žáků s vysokým percentilem, kteří však byli učiteli hodnoceni jako průměrní. Tyto případy naznačují, že ačkoli je vztah obecně silný, mohou existovat situace, kdy učitelský úsudek či konstrukce testu vedou k odlišným výsledkům.

Oba zjištěné vztahy jsou nejen statisticky, ale i věcně významné, a to i přes omezení vyplývající z velikosti vzorku ($N = 45$). Je proto vhodné ověřit je na větším souboru žáků a současně se zaměřit na faktory, které mohou vysvětlovat zmíněné nesoulady – ať už jde o náročnost úloh či další charakteristiky žáků ovlivňující učitelský úsudek. Tyto výsledky ukazují, že objektivní měření výkonu a učitelský úsudek se vzájemně doplňují, avšak každý z těchto zdrojů může podléhat specifickým omezením.

Pro každou úlohu byla testována hypotéza *Úspěšnost v úloze nezávisí na nadání*. Jako citlivá na testování nadání se ukázala jediná úloha ze sledovaného subtestu, a to byla úloha 4, která neumožnila algoritmické řešení, ale zároveň neobsahovala příliš zatěžující faktory pro nadané žáky. V písemných řešeních žáků jsem se setkávala s povrchovými způsoby řešení, absencí kontroly výsledku a implikačními zápisy. Povrchové přístupy k řešení se týkaly více skupiny žáků ostatních. Chybějící kontrola výsledku platila pro obě skupiny, nadaní žáci měli však výhodu v tom, že méně často chybovali a neprovedení zkoušky se tedy na výsledku neprojevovalo. Implikační zápis se vyskytoval u obou skupin žáků. Na druhou stranu se ve vzorku žáků projevila ochota přecházet mezi strategiemi v případě, že žák nedokázal řešení najít sofistikovanější metodou. To platilo pro obě skupiny žáků, ovšem s tím rozdílem, že ve skupině nadaných byla větší část těch, kteří řešení určili z paměti, a ve skupině ostatních naopak větší část těch, kteří úlohu nechali nevyřešenou.

Vyhledávání matematických talentů v průběhu základní školy je důležité zejména proto, aby se nadaní žáků mohlo včas začít rozvíjet, a to ideálně na úrovni školy, nikoli jen mimo ni. Předložený výzkum znovu

upozornil na to, že identifikace nadání je komplexní proces, do kterého by mělo vstupovat nejen posuzování výkonnosti žáka na základě testů, ale také dlouhodobé posuzování projevů žáka z různých hledisek.

Acknowledgment

Děkuji Marii Budíkové z Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity, která mi pomáhala při vyhodnocování dat a zasvětila mě do práce s programem Statistica.

Literatura

- Adetula, L. O. (1990). Language factor: Does it affect children's performance on word problems? *Educational Studies in Mathematics*, 21, 351–365.
- Alexander, J. M., Carr, M., & Schwanenflugel, P. J. (1995). Development of metacognition in gifted children: Directions for future research. *Developmental Review*, 15(1), 1–37. <https://doi.org/10.1006/drev.1995.1001>
- Betts, G. T., & Neihart, M. (1988). Profiles of the gifted and talented. *Gifted Child Quarterly*, 32(2), 248–253. <https://doi.org/10.1177/001698628803200202>
- Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook 1: Cognitive domain*. McKay.
- Boonen, A. J., de Koning, B. B., Jolles, J., & Van der Schoot, M. (2016). Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training. *Frontiers in Psychology*, 7, Article 191. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00191>
- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.) (2004). *How people learn*. National Academy Press.
- Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation and understanding* (pp. 65–116). Erlbaum.
- Budínová, I. (2018). *Přístupy nadaných žáků 1. a 2. stupně základní školy k řešení některých typů úloh v matematice*. Muni Press. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9216-2018>
- Budínová, I. (2025). Word problems with Diophantine equations solved by gifted 5th grade elementary school pupils. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *International symposium elementary mathematics teaching. Elementary mathematics: Building strong foundations* (pp. 86–94). Charles University, Faculty of Education.
- Cígler, H., Jabůrek, M., Straka, H., & Portešová, Š. (2017). *Test pro identifikaci nadaných žáků v matematice TIM³⁻⁵*. Masarykova univerzita. <https://www.nadanedeti.cz/testy-matematicky-test-tim>
- Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., & Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20(4), 405–438. [https://doi.org/10.1016/0010-0285\(88\)90011-4](https://doi.org/10.1016/0010-0285(88)90011-4)
- Forčík, V. & Forčíková, J. (2007). *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností*. Portál.
- ČŠI (2022). *Podpora vzdělávání nadaných a mimořádně nadaných žáků v základních a středních školách*. <https://www.csicr.cz/cz/Aktuality/Tematicka-zprava-%E2%80%93Podpora-vzdelavani-nadanых-a-m>
- Gagné, F. (2005). From gifts to talents. The DMGT as a developmental model. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 98–119). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511610455.008>
- Gardner, H. (2006). *Multiple intelligences: New horizons in theory and practice*. Perseus Books.
- Gutiérrez, A., Benedicto, C., Jaime, A., & Arbona, E. (2018). The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems: Analysis of key moments in a pre-algebra teaching sequence. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness (ICME-13 Monographs)* (pp. 169–198). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73156-8_7
- Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Dover Publication.
- Havigerová, J. M. (2011). *Pět pohledů na nadání*. Grada.
- Hendl, J. (2012). *Přehled statistických metod: analýza a metaanalýza dat*. Portál.
- Hříbková, L. (2009). *Nadání a nadaný*. Grada.
- Jabůrek, M., Cígler, H., Valešová, T., & Portešová, Š. (2022). What is the basis of teacher judgment of student cognitive abilities and academic achievement and what affects its accuracy? *Contemporary Educational Psychology*, 69, 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2022.102068>
- Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: An overview. *Theory into practice*, 41(4), 212–218. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_2

- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education. ICME-13 Topical Surveys*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1
- Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM*, 49(6), 937–949. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3>
- Machů, E., Kočvarová, I., Císlerová, T., & Vápeník, P. (2013). *Kvalita školy z hlediska péče o nadané žáky*. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.
- McBee, M. T., & Makel, M. C. (2019). The quantitative implications of definitions of giftedness. *AERA Open*, 5(1). <https://doi.org/10.1177/2332858419831007>
- Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (2024). *Statistická ročenka školství – výkonové ukazatele 2023/24*. <https://statis.msmt.cz/rocenka/rocenka.asp>
- Nathan, M. J., Kintsch, W., & Young, E. (1992). A theory of algebra-word- problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and Instruction*, 9, 329–389. https://doi.org/10.1207/s1532690xc0904_2
- Portešová, Š. (2011). *Rozumově nadané děti s dyslexií*. Portál.
- Portešová, Š., Poledňová, I., Macek, D., Růžička, M., Straka, O., & Urmanová, J. (2014). *Rozumově nadaní studenti s poruchou učení*. Masarykova univerzita.
- Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Reexamining a definition. *Phi Delta Kappan*, 60(3), 180–184.
- Renzulli, J. S. (2005). *Equity, excellence, and economy in a system for identifying students in gifted education: A guidebook* (RM 05208). University of Connecticut, National Research Center on the Gifted and Talented.
- Sternberg, R. J., & Williams, W. M. (2002). *Educational psychology*. Allyn & Bacon.
- Straka, O. (2021). *Jak měřit metakognici (nejen) u nadaných dětí*. Masarykova univerzita. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9905-2021>
- Straker, A. (1980). Identification of mathematically gifted pupils. *Mathematics in School*, 9(4), 4–8.
- Szabo, A., Tillnert, A. S., & Mattsson, J. (2024). Displaying gifted students' mathematical reasoning during problem solving: Challenges and possibilities. *The Mathematics Enthusiast*, 21(1), 179–202. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1623>
- Tannenbaum, A. J., & Baldwin, L. J. (1983). Giftedness and learning disability: A paradoxical combination. In L. H. Fox, L. Brody & D. Tobin (Eds.), *Learning disabled/gifted children: Identification and programming* (pp. 11–36). University Park Press.
- Vondrová, N. (2020). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládnutí kritických míst*. Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.
- Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvát, M., Novotná, J., Pácho, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha. Mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.
- Warne, R. T. (2012). History and development of above-level testing of the gifted. *Roeper Review*, 34(3), 183–193. <https://doi.org/10.1080/02783193.2012.686425>

Příloha

Subtest 1: Úlohy typu *Myslím si číslo*

1. Myslím si číslo. Když k němu přičtu 8, dostanu 22. Které číslo si myslím?
2. Myslím si číslo. Když ho vynásobím dvěma a od výsledku odečtu 3, dostanu 7. Které číslo si myslím?
3. Myslím si číslo. Když od něj odečtu 7 a výsledek vydělím dvěma, dostanu 8. Které číslo si myslím?
4. Myslím si číslo. Když ho vynásobím samo sebou a k získanému součinu přičtu myšlené číslo, dostanu 90. Které číslo si myslím?
5. Myslím si dvojčíferné číslo. Když vytvořím jeho ciferný součet (například ciferný součet čísla 25 je $2 + 5 = 7$) a vynásobím ho dvěma, dostanu myšlené číslo. Které číslo si myslím?
6. Myslím si číslo. Když k němu přičtu trojnásobek tohoto čísla, dostanu 24. Které číslo si myslím?

Subtest 2: Dělení celku na nestejně části

1. Součet dvou čísel je 100, jejich rozdíl je 32. O která čísla se jedná?
2. Maminka s tatínkem mají dohromady 70 let. Tatínek je o 4 roky starší než maminka. Kolik let je mamince a kolik tatínkovi?
3. Julča má v levé a pravé kapse dohromady 51 korun. V levé kapse má o 7 korun méně než v pravé kapse. Kolik korun má v pravé kapse?
4. Rozdělte 100 kostek do tří krabic tak, aby v modré krabici bylo dvakrát víc kostek než v červené a v zelené o 20 kostek méně než v červené krabici. Kolik kostek bude v každé krabici?
5. Obvod trojúhelníku je 87 cm. Strana b je o 15 cm kratší než strana a , strana c je o 12 cm delší než strana b . Vypočítej délky jednotlivých stran.
6. 35 litrů benzínu se má rozlít do čtyř kanystrů tak, aby ve třetím kanystru bylo o pět litrů méně než v prvním, ve čtvrtém kanystru o 10 litrů více než ve třetím a v druhém kanystru polovina toho, co v prvním. Kolik litrů benzínu bude v jednotlivých kanystrech?

Subtest 3: Úlohy vedoucí na soustavy rovnic

1. Dvě housky a dva rohlíky stojí dohromady 22 Kč. Dvě housky a čtyři rohlíky stojí dohromady 28 Kč. Urči, kolik korun stojí rohlík a kolik houska.
2. Tatínek kupoval tři autíčka, červené, modré a zelené. Modré stálo dvakrát více než červené, zelené stálo tolik, co červené a modré dohromady. Všechna autíčka stála dohromady 120 Kč. Kolik korun stálo každé autíčko?
3. Sešit a tužka stojí dohromady 39 Kč. Dvě tužky a tři sešity stojí dohromady 102 Kč. Kolik korun stojí sešit a kolik tužka?
4. Lucka chová kočičku a pejska. Kočka a pes váží dohromady 24 kg, kočka a Lucka váží dohromady 41 kg, Lucka a pes dohromady 47 kg. Kolik kilogramů váží každý z nich?
5. Všichni členové čtyřčlenné rodiny váží dohromady 176 kg. David a Honza váží dohromady 45 kg, Honza a maminka dohromady 84 kg, Honza a tatínek 99 kg. Kolik kilogramů váží Honza?
6. Dědeček rozdává vnukům oříšky. Kdyby jim dával po 10 oříscích, 4 oříšky mu budou chybět. Kdyby rozdával po 8 oříscích, 6 oříšků mu zbude. Kolik má dědeček vnuků a kolik má oříšků?

Subtest 4: Diofantické rovnice

1. Mírek měl 14 koleček a stavěl z nich autíčka a trojkolky. Kolik autíček a kolik trojkolek mohl vytvořit, když využil všechna kolečka?
2. Kuba měl v pokladničce pouze dvoukorunové a pětikorunové mince. Kolik kterých mincí může mít, jestliže má v pokladničce právě 37 Kč? Pokus se najít všechna řešení.
3. Motýli a pavouci mají dohromady 76 nohou. Kolik může být motýlů a kolik pavouků? (Motýl má 6 nohou a pavouk 8 nohou). Pokus se najít všechna řešení.
4. Laura si ukládá do pokladničky jen dvacetikorunové a padesátikorunové mince. Kolika způsoby může zaplatit 430 Kč?
5. Aleš měl 23 koleček a chtěl stavět autíčka, trojkolky a koloběžky. Chtěl využít všechna kolečka a od každého vozidla chtěl mít alespoň jeden kus. Kolik měl možností, jak vozidla vyrobit?
6. Na farmě chovají koně, kozy a kachny. Dohromady mají 64 hlav. Kachen je dvakrát více než koz, koní je nejméně. Kolik mohou mít koní, koz a kachen?

Subtest 5: Kombinatorika

1. Z číslic 2, 3, 6, 7 zapiš všechna dvojčífná čísla. Číslice se v zápisu čísla nesmí opakovat.
2. V rovině je 5 bodů. Každé dva z těchto bodů spojíme úsečkou. Kolik takových úseček existuje?
3. Pět kamarádů běhalo na plese v hadovi. Kolika způsoby mohli být v hadovi uspořádání?

4. Kolik existuje čtyřciferných čísel, která jsou sestavena z číslic 1, 3, 4, 6, 0? Číslice se v zápisu čísla nesmí opakovat.
5. Na večírku bylo 12 osob a podali si ruku každý s každým. Kolik podání ruky to bylo?
6. Kolik různých slov (i těch, která nadávají smysl) lze sestavit z písmen slova OPERA?